

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОТАЦИОННОГО МАЯТНИКА В ПОЛЕ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ

Еремьянц В.Э., Усубалиев Ж., Кынатбекова Н.Н.

*Институт машиноведения и автоматики Национальной академии наук
Кыргызской Республики, г. Бишкек*

Ключевые слова: экспериментальные стенды, ротационный ударный механизм, колебания ротационного маятника, динамическая модель.

Аннотация. Приведен краткий обзор работ по созданию и исследованию ротационно-маятниковых ударных механизмов для экспериментальных стендов и горной практики. Обсуждены предшествующие модели движения этих механизмов как ротационных маятников и отмечены их недостатки. Представлена новая модель, ротационного маятника, отличающаяся от предыдущих учетом влияния его формы на затухание колебаний.

DYNAMIC MODEL OF A ROTARY PENDULUM IN THE FIELD OF INERTIAL FORCES

Eremyants V.E., Usubaliev Zh., Kynatbekova N.N.

*Institute of Mechanical Engineering and Automation of the National Academy
of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek*

Keywords: experimental stands, rotary percussion mechanism, oscillations of a rotary pendulum, dynamic model.

Abstract. A brief overview of works on the creation and research of rotary-pendulum impact mechanisms for experimental stands and mining practice is given. The previous models of motion of these mechanisms as rotary pendulums are discussed and their shortcomings are noted. A new model of a rotary pendulum is presented, which differs from the previous ones by taking into account the influence of its shape on the damping of oscillations.

Ротационно-маятниковые ударные механизмы нашли широкое применение в испытательных стендах при исследовании влияния ударных нагрузок на колебания и прочность аппаратуры, ударно-усталостное разрушение материалов и других процессов, связанных с виброударными нагрузками [1-3]. Эти стенды обычно состоят из вращающегося ротора, на котором шарнирно закреплены ударники, выполненные в виде стержня, на конце которого расположена ударная масса. Все описываемые стенды можно разделить на две большие группы. Стенды для создания одиночных ударов с высокими скоростями, и стенды для создания ударно-циклических нагрузок на исследуемые образцы.

Стенды первой группы (рис. 1,а) основаны на накоплении кинетической энергии при вращении ротора 1 с зафиксированным на нем положением ударника 2 и расфиксации ударника при достижении требуемой скорости или энергии удара. При этом ударник, совершая вращение относительно точки его закрепления на роторе, наносит удар бойком 3 по исследуемому объекту 4. Динамика таких механизмов достаточно подробно исследовалась в работах [2-4].

В стендах второй группы (рис. 1,б) на роторе размещено несколько – три или четыре – ударника 2 свободно вращающихся относительно ротора. Перед

ударом по исследуемому образцу 4 ударные массы (бойки 3) за счет сил инерции располагаются на одной линии, проходящей через кинематические пары и центр ударной массы.

Такие устройства были использованы в работе [1] для исследования ударно-абразивного изнашивания материалов. В работе [5] предложено использовать их в качестве ручных ударных механизмов для разрушения горных пород и твердых покрытий в горном деле и строительстве. Однако результатов исследования динамики таких ударных механизмов в литературе практически не встречается или, по крайней мере, их мало. Например, в работе [5] приведен пример кинестатического расчета такого механизма графоаналитическим методом. В работах [6, 7] разработан экспериментальный стенд и проведены экспериментальные исследования динамики этих механизмов.

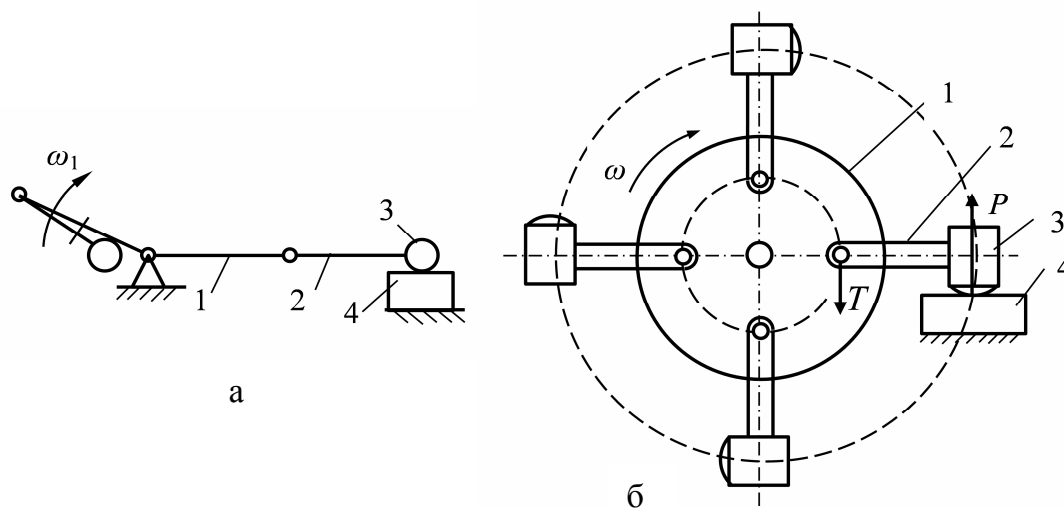


Рис. 1. Схемы ротационных ударных механизмов для испытаний изделий и материалов на ударные (а) и ударно-циклические (б) нагрузки

Результаты этих исследований показали существенные колебания угловой скорости ротора, вызванные ударными реакциями, действующими на ротор при ударах. В связи с этим в работе [8] была предложена методика выбора параметров ударника, при которых ударные реакции, действующие на ротор, сведены к минимуму. Но динамической или математической модели, позволяющей прогнозировать поведение рассматриваемого устройства при различных коэффициентах восстановления скорости ударника после удара и различных соотношениях параметров звеньев устройства, в литературных источниках не найдено. В связи с этим разработка такой модели и являлась задачей данной работы.

В основу разрабатываемой модели была положена модель, представленная в работе [4] и соответствующая стендам первой группы. При этом будем придерживаться термина, введенного в этой работе, «ротационный маятник в поле инерционных сил», который на наш взгляд отражает существо исследуемого процесса.

Принимая допущения о расположении механизма в горизонтальной плоскости и исключения влияния сил тяжести и считая, что масса m бойка 3

сосредоточена в точке, автор [4], используя уравнение Лагранжа второго рода, приходит к следующему уравнению движения:

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}_1(1 + \cos \varphi) + \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где φ_1, φ_2 – углы поворота соответственно ротора 1 и маятника 2, рад (рис. 1); φ – угол поворота маятника относительно ротора, рад, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

Далее, принимая, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью, равной ω_0 уравнение (1) упрощается до вида:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin \varphi. \quad (2)$$

Его решением при начальных условиях:

$$\dot{\varphi}(0) = 0; \quad 0 < \varphi(0) \leq -\pi,$$

являются функции:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}, \quad (3)$$

где знак плюс соответствует нечетному значению полупериода, а знак минус – четному.

Из полученного решения в [4] делаются выводы, что максимальное значение скорости бойка 3 будет достигнуто при нечетных полупериодах движения маятника, и это значение может быть в два раза больше скорости, которая была бы, если бы звенья 1 и 2 были одним жестким звеном.

Полученное решение противоречит наблюдениям. Известно, что при постоянной скорости вращения ротора под действием сил инерции звено 2 с течением времени должно располагаться на одной линии со звеном 1 и в дальнейшем его угловая скорость будет равна угловой скорости ротора. Следовательно, решение (3) соответствует только началу переходного процесса, в процессе которого звено 2 будет то обгонять, то отставать от звена 1 с затухающей амплитудой этих колебаний.

Вероятно, что это противоречие возникает из-за того, что в модели [4] боек представляется в виде материальной точки и не учитывается его форма. Для подтверждения этого предположения рассмотрим ротационный механизм, представленный на рисунке 2,а.

Он состоит из цилиндрического ротора 1 (AB) с моментом инерции J_1 и стержневого элемента 2 (BC), на конце которого (в точке C) расположен боек массой m_2 , имеющий, в отличие от рассмотренного в статье [4], определенную форму с моментом инерции относительно его центра масс J_{2C} .

Например, если боек имеет форму параллелепипеда, то его момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через центр масс:

$$J_{2C} = \frac{m_2}{12}(a^2 + b^2),$$

где a, b – размеры проекции параллелепипеда в плоскости чертежа, м.

Если груз имеет форму цилиндра:

$$J_{2C} = \frac{m_2}{12}(3r^2 + h^2),$$

где r, h – радиус и высота цилиндра, м.

Если груз имеет форму шара:

$$J_{2C} = \frac{2}{5} m_2 r^2,$$

где r – радиус шара, м.

Остальные допущения, принятые в статье [4] остаются прежними:

1. Силы тяжести звеньев намного меньше инерционных сил и ими можно пренебречь.

2. Масса стержня 2 пренебрежимо мала по сравнению с массой бойка 3.

3. Ротор 1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 .

Последнее обеспечивается устранением действия ударных реакций на ротор по методике, изложенной в работе [8].

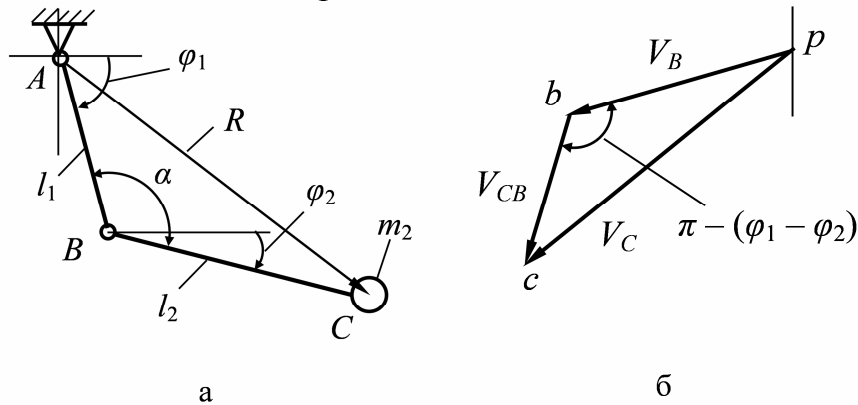


Рис. 2. Расчетная схема ротационного механизма (а) и его план скоростей (б)

Механизм имеет две степени свободы и его движение описывается двумя обобщенными координатами φ_1 и φ_2 , отсчитываемыми от горизонтальной оси в направлении вращения ротора 1 (рис. 2,а).

Для составления уравнений движения механизма воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы состоит из трех составляющих:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} + \frac{J_2 \omega_R^2}{2}, \quad (4)$$

где T_1 – кинетическая энергия ротора; T_2 – кинетическая энергия поступательного движения центра масс бойка; T_3 – кинетическая энергия вращения бойка относительно неподвижного начала координат; J_1 – момент инерции ротора, кгм²; m_2 – масса груза, кг; V_C – скорость точки C , м/с.

Из плана скоростей, представленного на рис. 2 б, следует:

$$V_C^2 = V_B^2 + V_{CB}^2 + 2V_B V_{CB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

ω_R – угловая скорость вектора R , соединяющего груз с неподвижной опорой, расположенной в начале координат, с⁻¹.

$$\omega_R^2 = V_C^2 / R^2; \quad R^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \quad (5)$$

J_2 – момент инерции груза относительно неподвижной точки A кгм²;

$$J_2 = J_{2C} + m_2 R^2 = J_{2C} + m_2 l_2^2 (k^2 + 1 + 2k \cos \psi), \quad (6)$$

С учетом предыдущих зависимостей уравнение кинетической энергии (4) запишется в следующем виде:

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2}{2} \left[\dot{\varphi}_1^2 k^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 k \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right] + \frac{1}{2} \left(J_{2C} + m_2 l_2^2 (k^2 + 1 + 2k \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) \right) \left(\frac{\dot{\varphi}_1^2 k^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 k \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{k^2 + 1 + 2k \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \right). \quad (7)$$

где $k = l_1/l_2$.

Вводя замену переменной:

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1; \quad \dot{\psi} = \dot{\varphi}_2 - \omega_1; \quad \ddot{\psi} = \ddot{\varphi}_2, \quad (8)$$

где ψ – перемещение звена 2 относительно ротора 1, и учитывая принятые допущения: $\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = const$; $\ddot{\varphi}_1 = 0$, получим уравнение кинетической энергии в следующем виде:

$$T = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2}{2} \left[\dot{\psi}^2 + 2 \dot{\psi} \omega_1 (1 + k \cos \psi) + \omega_1^2 (k^2 + 1 + 2k \cos \psi) \right] + \frac{1}{2} \left(J_{2C} + m_2 l_2^2 (k^2 + 1 + 2k \cos \psi) \right) \left(\frac{\dot{\psi}^2 + 2 \dot{\psi} \omega_1 (1 + k \cos \psi)}{(k^2 + 1 + 2k \cos \psi)} + \omega_1^2 \right). \quad (9)$$

Здесь неизвестной является функция ψ . Подставляя выражение (9) в уравнение Лагранжа, записанное относительно координаты ψ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \quad (10)$$

и проводя дифференцирование, получим следующее уравнение:

$$\ddot{\psi} + \dot{\psi}^2 g \sin \psi + b \sin \psi = 0. \quad (11)$$

где

$$g = \left(\frac{J_{2C} k (k^2 + 1 + 2k \cos \psi)}{J_{2C} + 2m_2 l_2^2 (k^2 + 1 + 2k \cos \psi)} \right); \quad b = \frac{2m_2 l_2^2 \omega_1^2 k (k^2 + 1 + 2k \cos \psi)}{J_{2C} + 2m_2 l_2^2 (k^2 + 1 + 2k \cos \psi)}.$$

По структуре это известное в теории колебаний уравнение затухающих колебаний маятника, когда затухание пропорционально квадрату его скорости [9]. Из полученных формул видно, что динамика рассматриваемого ротационного маятника в отличие от работы [4] зависит от момента инерции бойка, который, вероятно, и обеспечивает это затухание.

Уравнение (11) может быть решено численными методами, но в ряде частных случаев оно допускает и аналитическое решение. Поиск таких решений и анализ полученной модели с целью установление влияния различных факторов на затухание колебаний маятника является задачей дальнейшей работы.

Список литературы

1. Виноградов В.Н., Сорокин Г.М., Албагачиев А.Ю. Изнашивание при ударе. – М.: Машиностроение, 1982. – 192 с.
2. Мигиренко Г.С., Евграфов В.Н., Рыков А.А., Хон В.Ф. Ударные стенды для испытания малогабаритных изделий. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1987. – 216 с.
3. Воронкин В.В. Ротационные ударные механизмы. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2016. – 88 с.

4. Манжосов В.К. Движение ротационного маятника в поле центробежных сил // Вестник УлГТУ. 2005. №2. С. 27-29.
5. Усубалиев, Ж., Эликбаев, К.Т., Кынатбекова, Н.Н. Графоаналитический метод исследования ударного механизма переменной структуры с динамической связью // Известия НАН КР. – Бишкек: Илим, 2018. – С. 29-36.
6. Райымбабаев, Т.О., Кынатбекова Н.Н. Экспериментальный стенд по определению колебаний угловой скорости вала ротора ударного механизма переменной структуры с динамической связью // Машиноведение. 2019. №2(10). С. 27-38.
7. Усубалиев, Ж., Эликбаев, К.Т., Райымбабаев Т.О., Кынатбекова, Н.Н. Результаты экспериментальных исследований образца ударного механизма переменной структуры с динамической связью // Машиноведение. 2020. №1(11). С.73-83.
8. Еремьянц В.Э. Пример выбора рациональных параметров ударной системы ротационного ударного механизма // Машиноведение. 2020. №1(11). С. 84-90.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с немецкого С.В. Фомина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 576 с.

Сведения об авторах:

Еремьянц Виктор Эдуардович – д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Отдела Инноваций, новой техники и технологий, Имаш НАН КР, г. Бишкек.

Усубалиев Женишбек – к.т.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории Камнедобывающие комплексы, Имаш НАН КР, г. Бишкек.

Кынатбекова Нуржамал Нуржановна – младший научный сотрудник лаборатории Камнедобывающие комплексы, Имаш НАН КР, г. Бишкек.