

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БЕСКОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ МНОГОМАССОВЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Проурзин В.А., Шевляков Г.Л.

*Институт проблем машиноведения Российской Академии Наук,
г.Санкт-Петербург*

Ключевые слова: гашение колебаний, управление, бесколебательность, робастность, формирующий фильтр.

Аннотация. Поставлена и решена задача построения управлений, обеспечивающих бесколебательное движение упругой конструкции и нечувствительных (робастных) к отклонениям собственных частот конструкции от заданных значений. Построенные управления могут быть реализованы с помощью формирующего фильтра входного сигнала.

ROBUST CONTROL OF VIBRATIONLESS MOVEMENT OF MULTI-MODE ELASTIC STRUCTURES

Prouzrin V.A., Shevlyakov G.L.

*Institute of Problems of Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences,
St.Petersburg*

Keywords: oscillation, vibration damping, control, vibrationless, input shaping filter.

Abstract. The problem of constructing controls that ensure the vibrationless motion of the elastic structure and are insensitive (robust) to deviations of the natural frequencies of the structure from the given values is posed and solved. The constructed control can be implemented using an input shaping filter.

Введение

При интенсивном перемещении упругих конструкций, например, упругих манипуляторов, исполнительных механизмов станков с числовым управлением, считывающих головок жестких дисков и т.п. возникают нежелательные колебания этих конструкций. Они приводят к серьезным проблемам с точностью позиционирования, пропускной способностью, надежностью и безопасностью.

Известен метод формирующего фильтра входного сигнала (Input Shaping method), который применяется для снижения упругих колебаний. Обзор исследований по этому методу за последние полвека приведен в [1]. Формирование управляющего сигнала осуществляется с помощью операции свертки начального (входного) воздействия с импульсной переходной характеристикой, представляющей сумму сдвинутых импульсов (дельта-функций Дирака). В результате выполнения операции свертки, построенный сигнал представляет собой сумму некоторого количества экземпляров начального сигнала, умноженных на весовые коэффициенты и сдвинутых во времени. Заметим, что в известных работах обоснование метода формирующего фильтра основаны на анализе амплитудного спектра Фурье. Если формирующий фильтр обнуляет значения спектра Фурье на собственных частотах системы, то такой формирующий фильтр называется ZV формирователь (Zero Vibration shaper) [1].

В результате применения ZV формирователя гасятся остаточные колебания объекта. Этот подход не гарантирует снижения амплитуд упругих колебаний на участке активного управления.

В работах [2,3] построены управления движением многомассового упругого объекта таким образом, чтобы исключить собственные колебания как в процессе перемещения, так и после достижения конечного состояния. Такой режим перемещения и реализующее его управление названы бесколебательными. Предложенный в [2,3] метод бесколебательного управления движением реализуется следующим образом. Строится начальное “жесткое” управление перемещения центра масс объекта. Далее строится рекуррентная последовательность функций с использованием всего двух операций: сдвига по времени и суммирования. Сдвиги по времени равны полупериодам колебаний с собственными частотами, а количество итераций равно количеству собственных частот объекта управления. Показано, что данный метод может быть реализован с помощью определенного формирующего фильтра. Процедура фильтрации увеличивает длительность начального управления на сумму полупериодов собственных колебаний объекта. Для реализации метода достаточно знать только суммарную массу и значения собственных частот объекта.

Известна проблема неустойчивости при использовании ZV формирователя для гашения колебаний [4-7]. При отклонении собственных частот от заданных значений в собственные колебания системы не обнуляются. Актуальна задача построения управлений, нечувствительных к конечным отклонениям собственных частот. Такие управления называются робастными управлениями. Методы построения робастных управлений при гашении остаточных колебаний обсуждены в работах [4-7]. Здесь рассматривается задача о построении максимально-робастных бесколебательных управлений и компьютерные методы ее решения. Постановка и общие подходы к решению таких задач изложены в работах [8-11].

1. Бесколебательные управления

Рассматривается задача бесколебательного перемещения упругой конструкции массы M_0 с собственными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ (рис. 1) с помощью внешнего скалярного управляющего усилия $F(t)$. Управление $F(t)$ ограничено и финитно: $|F(t)| \leq f$, $F(t) = 0$ при $t > T$. Конечный момент T является моментом достижения цели управления. Рассматривают различные цели управления. Например, придать объекту требуемое ускорение (задача бесколебательного старта), разогнать (затормозить) объект до заданной скорости, переместить объект на заданное расстояние и т.п. Бесколебательность понимается в том смысле, что в процессе движения и после достижения цели колебания упругой конструкции с собственными частотами не возникают.

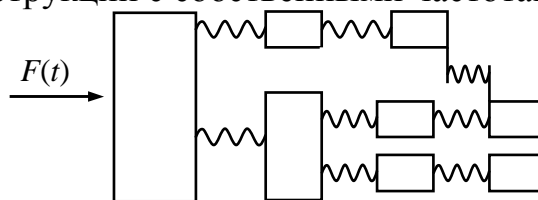


Рис. 1. Пример механической схемы упругого многомассового объекта

В работе [3] определение бесколебательного управления сведено к анализу двух показателей: остаточного спектра

$$R(\omega; F) = \frac{\max_{t>T} |r(t; \omega, F)|}{\max_{t>0} |F(t)|} = \frac{\omega}{\max_{t>0} |F(t)|} \left| \int_0^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

и коэффициента динамичности

$$K(\omega; F) = \frac{\max_{t>0} |r(t; \omega, F)|}{\max_{t>0} |F(t)|} = \frac{\omega}{\max_{t>0} |F(t)|} \max_{t>0} \left| \int_0^t F(s) \sin \omega(t-s) ds \right|.$$

Здесь $r(t; \omega, F) = \omega^2 x(t; F)$ – упругая реакция линейного осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t). \tag{1}$$

Выполнено свойство преобразования масштабов [12]:

$$K(\omega; \tilde{F}) = |p| K\left(\frac{\omega}{q}; F\right), \quad R(\omega; \tilde{F}) = |p| R\left(\frac{\omega}{q}; F\right), \tag{2}$$

где $\tilde{F}(t) = pF(q(t-\tau))$, $p, q > 0, \tau \geq 0$.

Определение. Управление $F(t)$ и движение системы с собственными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются бесколебательными, если выполнены условия:

$$K(\omega_k; F) = 1, \quad R(\omega_k; F) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Общее решение задачи бесколебательного управления получено в [2]. Решение состоит из двух этапов.

1. Строится начальное управление $F_0(t)$, решающее задачу перемещения центра масс из заданного начального в заданное конечное состояние оптимальным образом в смысле быстрогодействия. Пусть T – минимальное время достижения цели. Решение такой задачи оптимального быстрогодействия для точечной массы известно [13].

2. Используя полупериоды собственных колебаний $\tau_k = \pi\omega_k^{-1}$ в качестве сдвигов по времени, строится рекуррентная последовательность функций:

$$F_k(t) = \frac{1}{2} (F_{k-1}(t) + F_{k-1}(t - \tau_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Управление $F_n(t)$, построенное по алгоритму (4) с начальным управлением $F_0(t)$, решает задачу за время $T_n = T + \sum_{i=1}^n \tau_i$ и удовлетворяет определению бесколебательности. Доказательство этого утверждения приведено в [2].

Управление $F_n(t)$ может быть реализована с помощью каскадного цифрового фильтра с n линиями задержки (рис. 2).

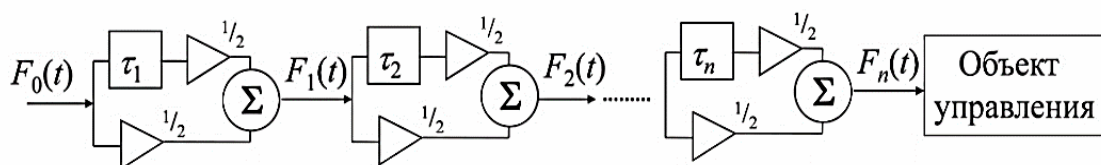


Рис. 2. Схема каскадного цифрового фильтра, реализующего бесколебательное управление

Доказано [2], что управление $F_n(t)$ также может быть представлено с помощью формирующего фильтра (рис. 3):

$$F_n(t) = \sum_{i=0}^P F_0(t - t_i).$$

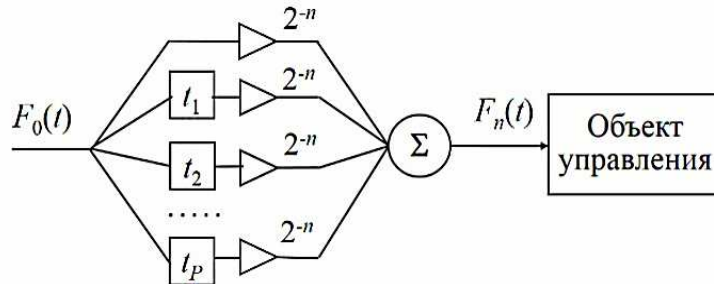


Рис. 3. Схема формирующего фильтра, реализующего бесколебательное управление

Фильтр включает $P = 2^n - 1$ линий задержки. Значения задержек t_i есть всевозможные частичные суммы полупериодов τ_k : $t_0 = 0$, $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_2$, $t_n = \tau_n$, $t_{n+1} = \tau_1 + \tau_2$, $t_p = \sum_k \tau_k$.

Из формулы (4) и свойств преобразование Фурье сигнала со сдвигом следует, что преобразование Фурье сигнала $F_n(t)$ обращается в ноль на собственных частотах и имеет следующий вид [14]:

$$F(\omega; F_n) = F(\omega; F_0) \prod_{k=1}^n \frac{1 + \exp(-i\tau_k \omega)}{2}, \quad (5)$$

где $F(\omega; F_0)$ – преобразование Фурье начального сигнала. Поскольку остаточный спектр выражается через преобразование Фурье, то из (5) и формулы Эйлера для экспоненты комплексного числа следует, что

$$R(\omega; F_n) = R(\omega; F_0) \prod_{k=1}^n \left| \cos \frac{\pi \omega}{2\omega_k} \right|. \quad (6)$$

Построенный формирующий фильтр, обнуляющий значения спектра Фурье на собственных частотах системы, называется ZV формирователь (Zero Vibration shaper) [1].

2. Задача максимально робастного управления

Управление, построенное по методу ZV, обладает существенным недостатком – при нем свойство бесколебательности неустойчиво. Уже небольшие отклонения собственных частот от заданных значений приводят к появлению собственных колебаний. Сформулируем задачу построения управлений, обладающих нечувствительностью к отклонению частот некотором интервале значений. Такие управления будут называться робастными.

Вначале формулируется и решается задача робастного управления для одночастотной системы (1). В силу свойства преобразования Фурье финитной функции, остаточный спектр $R(\omega; F)$ не может обращаться в ноль на интервале частот. Т.е. невозможно построить робастное управление, обеспечивающее бесколебательность на некотором интервале частот, если требовать строгое выполнение условий (3). Ослабим требования к бесколебательности. Задаются

допустимое значение $\varepsilon > 0$ и решения считаются бесколебательными, если выполнены следующие ограничения:

$$K(\omega; F) \leq 1 + \varepsilon, R(\omega; F) \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Пусть собственная частота известна с точностью до интервала $\Omega(\Delta) = [\omega_0(1-\Delta), \omega_0(1+\Delta)]$. Требуется построить управление $F(t)$, решающее задачу перемещения объекта и удовлетворяющее условиям (7) для всех частот, принадлежащих интервалу $\Omega(\Delta)$.

Параметр Δ задает допустимую относительную ошибку при оценке собственной частоты ω_0 объекта. Этот параметр заранее не известен, и требуется сделать его максимальным. Для некоторого управления $F(t)$ определяется множество частот $\Omega(F) = \{\omega : K(\omega; F) \leq 1 + \varepsilon, R(\omega; F) \leq \varepsilon\}$, для которых выполнены условия (7). Задается показатель робастности управления:

$$\Delta_\varepsilon(F) = \max \{\Delta : \Omega(\Delta) \subset \Omega(F)\}. \quad (8)$$

Задача максимально робастного управления. Пусть заданы константа ε и множество допустимых управлений. Требуется построить управление $F^*(t)$, принадлежащее множеству допустимых управлений и доставляющее максимум показателю $\Delta_\varepsilon(F)$.

Ранее задача построения робастных формирующих фильтров рассматривалась для условия подавления только остаточного спектра $R(\omega; F)$ [10,15-17]. Наиболее простым методом генерации формирователя с заданной нечувствительностью к частотным ошибкам является метод частотной выборки. В простейшем случае выбираются две частоты, и формируется фильтр, при котором остаточный спектр на этих частотах равен нулю. На значениях частот, лежащих между этими частотами, обеспечивается выполнение ограничения $R(\omega; F) \leq \varepsilon$. Этот подход называется экстра-нечувствительным (Extra-Insensitive (EI)) подходом [15]. Подход, основанный на выборе трех частот называется двух-горбым экстра-нечувствительным подходом (Two-Hump EI).

Здесь решение задачи максимально робастного управления основано на использовании EI и Two-Hump EI подходов. При этом обеспечивается подавление как остаточного спектра, так и коэффициента динамичности. Для решения задачи используются методы компьютерного моделирования и методы численной оптимизации.

Моделируется задача бесколебательного набора скорости системы (1) с собственной частотой ω_0 . Исходное управление $F_0(t)$ есть прямоугольный импульс длительности T . Следуя подходу EI, назначаются две частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$) и строится управление $F_2(t)$ по алгоритму (4) с временными сдвигами $\tau_1 = \pi\omega_1^{-1}$, $\tau_2 = \pi\omega_2^{-1}$. Выбором частот ω_1 и ω_2 максимизируется показатель $\Delta_{0,05}(F)$. Решение с использованием подхода Two-Hump EI производится аналогично с нахождением трех частот, ω_1 , ω_2 и ω_3 ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_3$).

Для вычисления остаточного спектра использована формула (6), в которой значение $R(\omega; F_0)$ оценено сверху $R(\omega; F_0) \leq 2$. Коэффициент динамичности $K(\omega; F)$ находился методом численного интегрирования. В силу свойства

преобразования масштабов (2), решение задачи можно провести для некоторого выбранного значения частоты ω_0 с последующим пересчетом для любой другой частоты. Результаты решения при $\varepsilon = 0.05$ сведены в таблицу 1.

Табл. 1.

Метод	$\max \Delta_{0,05}(F)$	Оптимальные частоты
Одночастотный (ZV)	0.016	ω_0
Двухчастотный (EI)	0.176	$0.899\omega_0, 1.0998\omega_0$
Трехчастотный (Two-Hump EI)	0.3	$0.745\omega_0, 0.984\omega_0, 1.2523\omega_0$

На рис. 4. Приведены графики динамического коэффициента и остаточного спектра в окрестности частоты ω_0 в случае максимально робастных управлений. На рис. 5 приведен пример исходного прямоугольного управления и максимально-робастного управления, построенного по трехчастотному алгоритму.

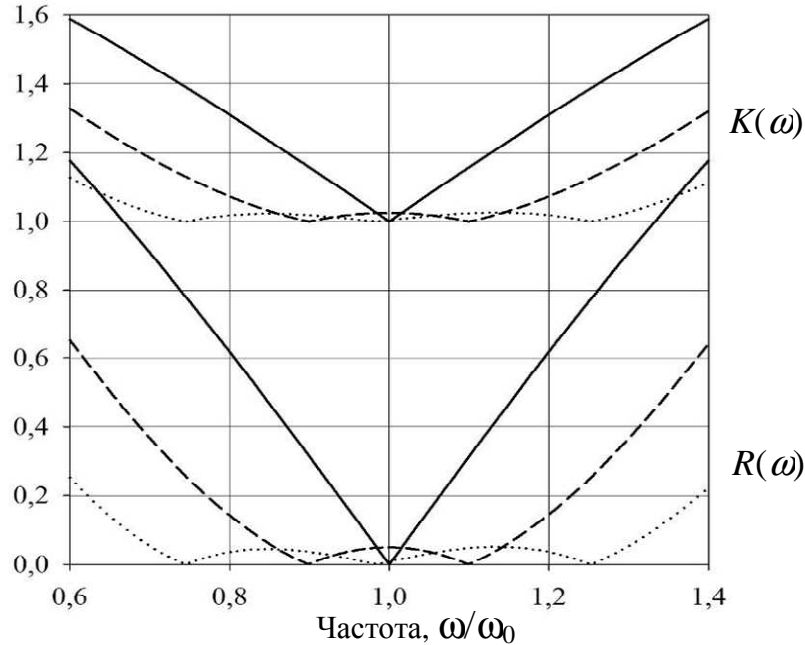


Рис. 4. Коэффициент динамичности и остаточный спектр при одночастотном (сплошные линии), двухчастотном (пунктирные линии) и трехчастотном (точечные линии) методах построения максимально-робастного управления

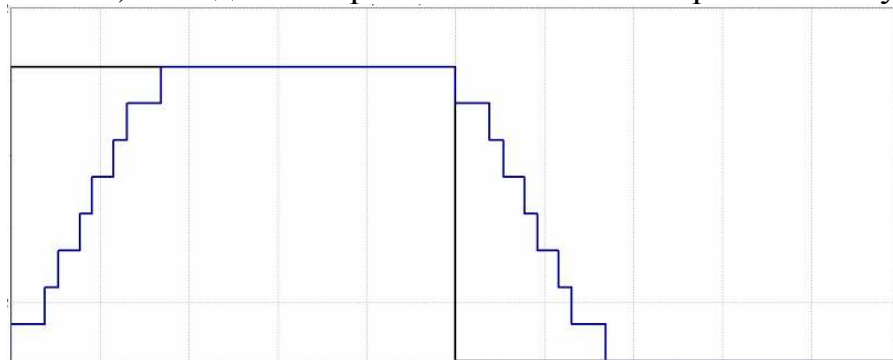


Рис. 5. Исходное прямоугольное управление $F_0(t)$ (черная линия) и максимально-робастное управление $F_3^*(t)$ (синяя линия), построенное по трехчастотному алгоритму

При построении максимально робастного бесколебательного управления многочастотной системой (1) при двухчастотном подходе вместо исходного набора n собственных частот ZV подхода берется набор $2n$ частот $\alpha_1 \omega_k, \alpha_2 \omega_k, k = 1, \dots, n$, где $\alpha_1 = 0.899, \alpha_2 = 1.0998$. Оптимально-робастное управление $F_{2n}(t)$ строится по алгоритму (4). Аналогично, при трехчастотном методе, строится управление по набор $3n$ частот.

Заключение

1. Полученные результаты будут полезны при управлении движением многочастотных упругих систем в случае, когда их упругие колебания нежелательны.

2. Проблема гашения колебаний решена в полной мере в том смысле, что динамические реакции упругой конструкции полностью исключены. Такой режим движения назван бесколебательным.

3. Сформулирована и решена задача робастного управления бесколебательным движением. Построенные робастные управление обладают минимальной чувствительностью к отклонениям собственных частот от заданных значений. При двухчастотном методе построения робастного управления допустимая ошибка при задании частот составляет 17.6%, при трехчастотном методе – 30%.

Список литературы

1. Singhose W. Command shaping for flexible systems: a review of the first 50 years // *Int. J. Precis. Eng. Man.* 10(4), 153-168 (2009).
2. Prourzin V.A. Control of Elastic Plant movement without excitation on eigen-oscillation // *Automation and Remote Control* 78(12), 2141-2153 (2017).
3. Проурзин В.А. Бесколебательное управление движением многомассовых упругих конструкций // *Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство.* – 2019. – №5. – С. 23-32.
4. Singh T., Vadali S.R. Robust time-optimal control: a frequency domain approach // *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 17, 346-353 (1994).
5. Vaughan J., Yano A., Singhose W. Comparison of robust input shapers // *Journal of Sound and Vibration* 315, 797-815 (2008).
6. Pao L., Lau M. Robust input shaper control design for parameter variations in flexible structures // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 122, 63-70 (2000).
7. Sung Y.G., Singhose W. Robustness analysis of input shaping commands for two-mode flexible systems // *IET Control Theory and Applications* 3, 722-730 (2009).
8. Prourzin V.A. Equivalent gaming formulations of the problem of designing the maximum robust controls // *Automation and Remote Control* 66(8), 1305-1315 (2005).
9. Shevlyakov G.L., Vil'chevski N.O. Robustness in data analysis: criteria and methods // *VSP, Utrecht-Boston-Tokio* (2002).
10. Shevlyakov G.L., Vil'chevski N.O. Robustness in data analysis // *De Gruyter, Boston* (2011).
11. Shevlyakov G.L., Oja H. Robust correlation: theory and applications // *Wiley, New York* (2016).
12. Prourzin V.A. A constrained scalar control for the motion of a system of oscillators with damping residual oscillations // *Journal of Computer and Systems Sciences International* 46(4), 521-531 (2007).
13. Boltyanskii V.G. *Mathematical methods of optimal control.* Moscow: Science, 1969.
14. Prourzin V.A. A problem of optimal shock isolation of elastic objects // *Mechanics of solids* 39(2), 22-29 (2004).

15. Park U.H., Lee J.W., Lim B.D., Sung, Y.G. Design and sensitivity analysis of an input shaping filter in the ZPlane // Journal of Sound and Vibration 243, 157-171 (2001).
16. Bhat S.P., Miu D.K. // Precise point-to-point positioning control of flexible structures // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 112(4) 667-674 (1990).
17. Singh T., Heppler G.R. Shaped input control of a system with multiple modes // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 115, 341-347 (1993).

Сведения об авторах:

Проурзин Владимир Афанасьевич – к.ф.-м.н., с.н.с., ИПМаш РАН, г.Санкт-Петербург;

Шевляков Георгий Леонидович – д.ф.-м.н., профессор, в.н.с., ИПМаш РАН, г.Санкт-Петербург.