

## КОНСТРУИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

*Бохонский А.И.<sup>1</sup>, Варминская Н.И.<sup>2</sup>, Мозолева Т.В.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Севастопольский государственный университет;*

<sup>2</sup>*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,  
г. Севастополь*

**Ключевые слова:** упругий объект, переносное движение, оптимальное управление (переносное ускорение), энергоёмкость управления, алгоритм конструирования управления.

**Аннотация.** На примере упругой системы иллюстрируется алгоритм конструирования оптимального управления типа «разгон-торможение» переносным поступательным движением из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние покоя при минимально возможном времени движения. Результаты конструирования при использовании восстановленного нового функционала-критерия проверяются вариационным методом теории оптимального управления. Установлено, что с ростом степени полинома управления (переносного ускорения) наблюдается снижение энергоёмкости конструируемого управляемого движения.

## DESIGNING OF THE OBJECT CONTROLLED MOTION

*Bokhonsky A.I.<sup>1</sup>, Varminskaya N.I.<sup>2</sup>, Mozolevskaya T.V.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Sevastopol State University;*

<sup>2</sup>*Black Sea Higher Naval School named after P.S. Nakhimov, Sevastopol*

**Keywords:** elastic object, translational and relative motion, optimal control (translational acceleration), control energy intensity, control design algorithm.

**Abstract.** An algorithm of constructing an optimal control of the "acceleration-deceleration" type for a translational motion from the initial state of absolute quiescence to the final state of absolute quiescence for the given minimum possible motion time is illustrated on an elastic system example. The results of control construction are verified by the variational method of the optimal control theory using the reconstructed new functional-criterion. It has been found that with an increase the degree of the control polynomial (translational acceleration), a decrease in the energy intensity of the controlled motion is observed.

Теории колебаний упругих систем и оптимальному управлению движением объектов посвящены работы [1-5]. В работе [3], например, моментные соотношения для определения времени устранения колебаний при оптимальном управлении используются только в простом (абсолютном) движении объектов.

Управлению переносным поступательным движением упругих систем посвящены работы [6-9], в которых приведены алгоритмы конструирования управлений (переносных ускорений) с учетом цели движения, ограничений на движение и управление. Продолжают оставаться актуальными исследования

динамического поведения упругих объектов при реверсионно сконструированном управлении.

*Цель исследований* – сравнительный анализ динамики упругой системы при полученном вариационным методом теории оптимального управления переносном ускорении и с использованием конструирования.

Известное [5] оптимальное управление (переносное ускорение) можно найти и с использованием конструирования, т.е. без заранее задаваемого критерия оптимальности, но, безусловно, с учетом известных ранее краевых условий.

Пусть перемещение описывается полиномом:

$$S_e(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3, \quad V_e(t) = C_2 + 2C_3 t + 3C_4 t^2 \quad (1)$$

при движении из исходного в конечное состояние покоя на расстояние  $L$  и условиях  $S_e(0) = 0, V_e(0) = 0, S_e(T) = L, V_e(T) = 0$ . Из решения системы алгебраических уравнений получим

$$C_1 = C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{3L}{T^2}; \quad C_4 = \frac{2L}{T^3} \quad (2)$$

и дальше с учетом (2) выражения для перемещения, скорости и ускорения принимают вид:

$$S_e(t) = \frac{Lt^2}{T^3}(3T - 2t), \quad V_e(t) = \frac{6Lt(T-t)}{T^3}, \quad U_e(t) = \frac{6L(T-2t)}{T^3}. \quad (3)$$

Общая энергия, затрачиваемая для перемещения массы  $m = 1$  кг, равна

$$E = 2 \int_0^{T/2} U_e(t) V_e(t) dt = \frac{2,25L^2}{T^2}. \quad (4)$$

Графики  $S_e(t), V_e(t), U_e(t)$  (при  $L = 1$  м и  $T = 1$  с) изображены на рисунке 1.

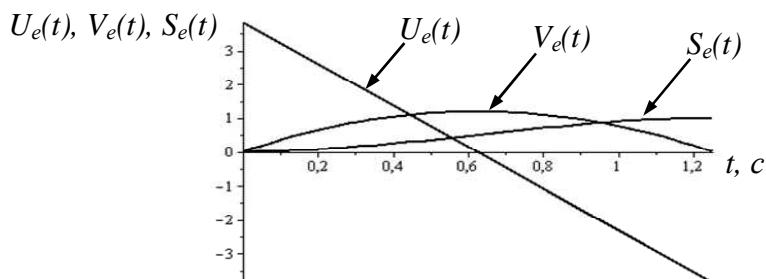


Рис. 1. Графики переносного движения  $S_e(t), V_e(t), U_e(t)$

Полином (1) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 S_e}{dt^4} = 0, \quad (5)$$

которому соответствует квадратичный функционал-критерий

$$J = \int_0^T (\ddot{S}_e)^2 dt = \int_0^T (\dot{V}_e)^2 dt, \quad (6)$$

где  $\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e$ .

Критерий (6) использовался заранее для решения задачи вариационным методом.

В общем случае реверсионное конструирование приводит к новым критериям оптимальности, отражающим характерные свойства конструируемого движения.

В следующем примере для оптимального перемещения объекта принят полином

$$\begin{aligned} S_e(t) &= C_1 t^2 + C_2 t^3 + C_3 t^4 + C_4 t^5, \\ V_e(t) &= \dot{S}_e(t), \quad U_e = \dot{V}_e(t), \end{aligned} \tag{7}$$

для которого  $S_e(0) = 0; V_e(0) = 0$ .

С учетом краевых условий и косой симметрии управлений

$$\begin{aligned} U_e(0) &= a, \quad U_e(T) = -a, \quad S_e(T) = 0, \\ \int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt &= 0, \quad U_e(T/2) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

из (8) получим:

$$C_1 = \frac{5L}{T^2}; \quad C_2 = -\frac{10L}{T^3}; \quad C_3 = \frac{10L}{T^4}; \quad C_4 = -\frac{4L}{T^5}; \quad a = \frac{10L}{T^2}. \tag{9}$$

В данном примере выражения для перемещения, скорости и ускорения (управления) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_e(t) &= \frac{10Lt}{T^5}(T-t)(2t^2 - 2T \cdot t + T^2), \\ V_e(t) &= \frac{Lt^2}{T^5}(5T^3 - 10T^2 \cdot t + 10T \cdot t^2 - 4t^3), \\ U_e &= \frac{10L}{T^5}(T - 2t)^3. \end{aligned} \tag{10}$$

Графики функций (10) для прежних исходных данных изображены на рисунке 2.

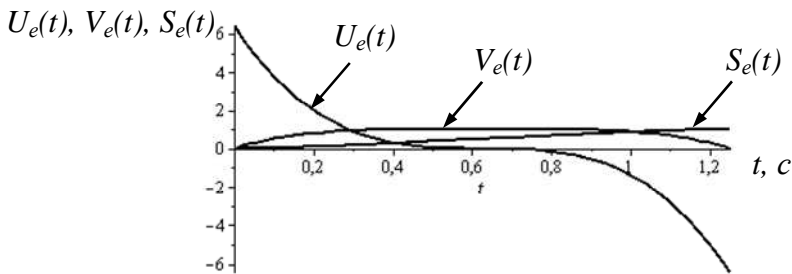


Рис. 2. Графики переносного движения  $S_e(t), V_e(t), U_e(t)$

Энергия, затрачиваемая на достижение цели движения

$$J = 2 \int_0^{T/2} U_e(t) V_e(t) dt = \frac{1,5625L^2}{T^2}. \quad (11)$$

По сравнению с предыдущим результатом (4) энергия уменьшается на 30,56%. Использован полином (7) для решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^6 S_e}{dt^6} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^4 U_e}{dt^4} = 0, \quad (12)$$

которому соответствует функционал-критерий

$$J = \int_0^T (\dot{U}_e)^2 dt. \quad (13)$$

С учетом критерия (13) и условий (8) решение найдено вариационным методом.

Для рассмотренных двух типов управлений исследовано относительное движение (колебания) упругого объекта с одной степенью свободы без учета сопротивления, уравнение движения которого

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (14)$$

где  $k$  – частота собственных колебаний. Движение – из состояния относительного покоя, т.е.  $x_r(0) = 0$ ,  $\dot{x}_r(0) = 0$ .

Здесь управление (3)

$$U_e(t) = -\frac{6L(T-2t)}{T^3}$$

и решение уравнения (14)

$$x_r = -\frac{12L}{k^3 T^3} \sin(kt) + \frac{6L}{k^2 T^2} \cos(kt) - \frac{6L(T-2t)}{k^2 T^3}; \quad \dot{x}_r = \frac{dx_r}{dt}. \quad (15)$$

При  $k = 2\pi / T_1$ ;  $T_1 = T / n$ ;  $L = 1$  м. моментные соотношения ( $x(T) = 0$ ,  $\dot{x}(T) = 0$ ) преобразуются к системе трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n)\pi n - \pi n &= 0; \\ \cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi n - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Один из общих корней  $n = 2,459$  системы (16) найден графически (рисунок 3). Общее время движения (при  $k = 4\pi \text{ с}^{-1}$  и  $T_1 = 2\pi / k = 0,5 \text{ с.}$ )  $T = T_1 \cdot n = 1,23 \text{ с.}$

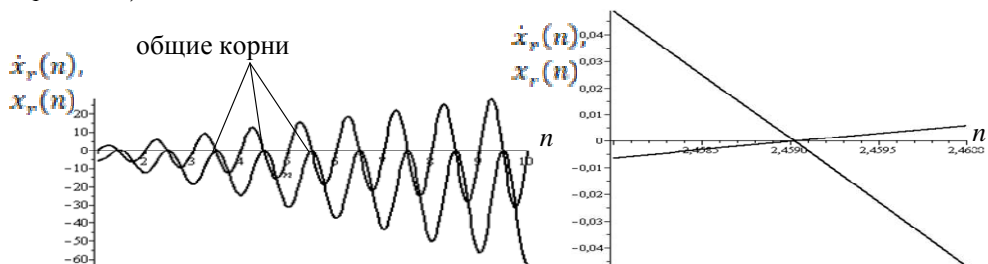


Рис. 3. Поиск общих корней системы трансцендентных уравнений

За время движения упругий объект совершает два полных колебания и в итоге, с учетом переносного покоя, достигает состояния абсолютного покоя (рисунок 4).

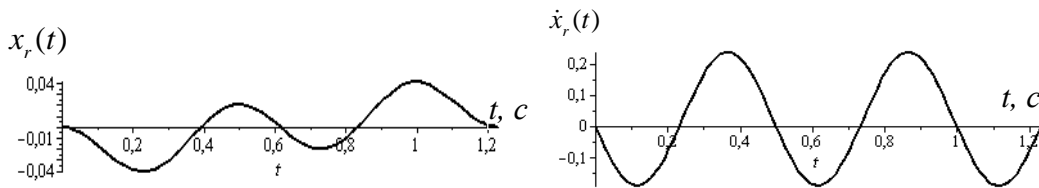


Рис.4. Графики относительного движения

Если принять управление (10)  $U_e(t) = -\frac{10L(T-2t)^3}{T^5}$ , то решение уравнения (14) будет следующим:

$$x_r = -\frac{6a(k^2T^2 - 8)}{k^5T^3} + \frac{a(k^2T^2 - 24)}{k^4T^2} \cos(kt) - \frac{a(k^2T^2 - 4k^2Tt + 4k^2t^2 - 24)(T - 3t)}{k^4T^3}, \quad (17)$$

где  $a = 10L / T^2$ .

После преобразований для этого случая моментные соотношения:

$$\begin{aligned} 3\sin(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6(2\pi n)\cos(2\pi n)\pi^3 n^3 + 6\cos(2\pi n)\pi n - \pi^3 n^2 + 6\pi n &= 0; \\ 3\cos(2\pi n)\pi^2 n^2 - 6\cos(2\pi n) + \sin(2\pi n)\pi^3 n^2 - 6\sin(2\pi n)\pi n - 3\pi^2 n^2 + 6 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Один из общих корней системы (18) найден в заданном интервале графически и равен  $n = 2,369$ . Поэтому  $T = T_1 \cdot n = 1,185$  с.

Как и предполагалось, при  $t = T$  достигается абсолютный покой, но общее время отличается от времени, полученного в предыдущем случае классического управления.

Графики  $x_r(t)$  и  $\dot{x}_r(t)$  изображены на рисунке 6.

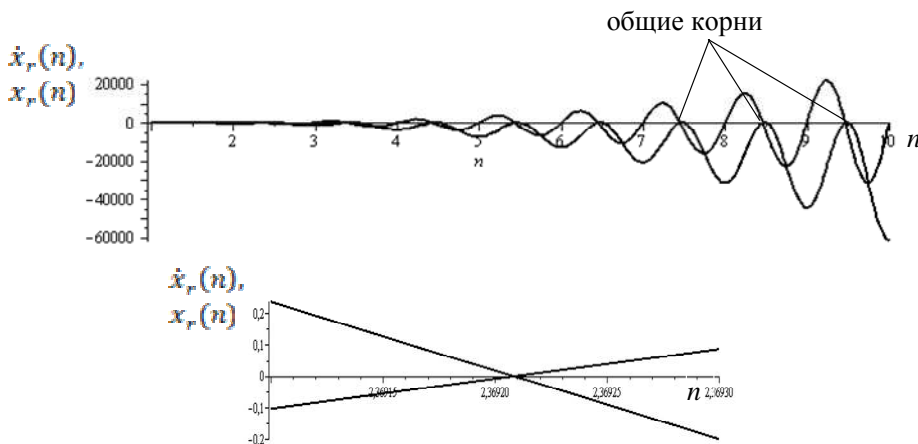


Рис. 5. Поиск общих корней

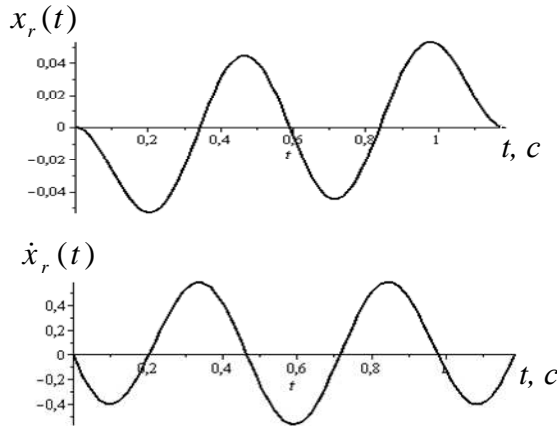


Рис. 6. Графики относительного движения

Если принять управление  $U_e(t) = \frac{a(T-2t)^{11}}{T^{11}}$ , где  $a = \frac{26L}{T^2}$ , то

энергоемкость составляет  $J_1 = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} U_e(t)V_e(t)dt = 1,173 \frac{L^2}{T^2}$ , а действие

$J_2 = \int_0^T V_e^2(t)dt = 1,04 \frac{L^2}{T}$ . В классическом случае

$$J_1 = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} U_e(t)V_e(t)dt = 2,25 \frac{L^2}{T^2}, \quad J_2 = \int_0^T V_e^2(t)dt = 1,2 \frac{L^2}{T}.$$

С ростом степени полинома при конструировании управления согласно РПО энергия и действие (по Лагранжу) уменьшаются, что свидетельствует о снижении уровня колебаний упругого объекта в относительном движении.

**Заключение.** Реверсионно восстанавливаемый функционал-критерий отражает оптимальность конструируемого переносного движения объекта. Показано, что найденное управление обеспечивает снижение энергии на реализацию целенаправленного движения. С увеличением степени полинома энергоемкость управления стремится к некоторому предельному значению, позволяющему достичь цели движения за заданное фиксированное время.

#### Список литературы

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1972. – 416с.
2. Вибрации в технике. Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
3. Карновский И.А., Почман Ю.М. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем. – Киев, Донецк: Высш. шк. 1982. – 116 с.
4. Троцкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
5. Теория автоматического управления. Ч.П. Теория нелинейных специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1997. – 288 с.

6. Бохо́нский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / под ред. А.И. Бохо́нского. – Севастополь: изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.
7. Бохо́нский А.И., Варминская Н.И. Вариационное и реверсионное исчисление в механике. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212 с.
8. Бохо́нский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М., 2016. – 174 с.
9. Бохо́нский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики: матер. международной науч.-практич. конференции. – Новокузнецк: НИЦ МС, 2017. – С. 38-41.

### References

1. Biderman V.L. Applied theory of mechanical vibrations. – M.: Higher School, 1972. – 416 p.
2. Vibrations in engineering. Guide. In 6 vols. 1. Oscillations of linear systems / Ed. by V.V. Bolotin. – M.: Mechanical Engineering, 1978. – 352 p.
3. Karnovsky I.A., Pochman Yu.M. Methods of optimal control of vibrations of deformable systems. – Kiev, Donetsk: Higher School, 1982. – 116 p.
4. Trotsky V.A. Optimal processes of vibrations of mechanical systems. – L.: Mashinostroenie, 1976. – 248 p.
5. Theory of automatic control. Part II. The special theory of nonlinear automatic control systems / Ed. By A.A. Voronov. – M.: Higher School of Economics, 1997. – 288 p.
6. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevsky M.I. Optimal control of portable motion of deformable objects: theory and technical applications. – Sevastopol: SevNTU Publishing House, 2007. – 296 p.
7. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Variational and reversion calculus in mechanics. – Sevastopol: SevNTU, 2012. – 212 p.
8. Bokhonsky A.I. Reversion principle of optimality. – M.: Vuzovsky textbook: INFRA-M., 2016. – 174 p.
9. Bokhonsky A.I. Energy intensity of object movement control // Fundamental fundamentals of mechanics: mater. international scientific and practical conference. – Novokuznetsk: SRC MS, 2017. – P. 38-41.

### *Сведения об авторах:*

### *Information about authors:*

<p><b>Бохо́нский Александр Иванович</b> – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технической механики и машиноведения, Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Россия, bohon.alex@mail.ru</p>	<p><b>Bokhonsky Alexander Ivanovich</b> – doctor of technical sciences, professor, professor of the Technical Mechanics and Engineering Science Department, Sevastopol State University, Sevastopol, Russia, bohon.alex@mail.ru</p>
<p><b>Варминская Наталья Ивановна</b> – кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин, Черноморское высшее военное морское училище имени П.С. Нахимова, г.Севастополь, Россия</p>	<p><b>Varminskaya Natalia Ivanovna</b> – candidate of technical sciences, associated professor, Head of the Physics and General Technical Disciplines Department, Black Sea Higher Naval School named after P.S. Nakhimov, Sevastopol, Russia</p>
<p><b>Мозолевская Татьяна Викторовна</b> – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры физики и общетехнических дисциплин, Черноморское высшее военное морское училище имени П.С. Нахимова, г.Севастополь, Россия</p>	<p><b>Mozolevskaya Tatyana Viktorovna</b> – candidate of technical sciences, associated professor, professor of the Physics and General Technical Disciplines Department, Black Sea Higher Naval School named after P.S. Nakhimov, Sevastopol, Russia</p>

*Получена 02.12.2020*