

УДК 681.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРЁХКОЛЁСНЫМ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ

Сизых В.Н., Баканов М.В.

Иркутский государственный университет путей сообщения, г.Иркутск

Ключевые слова: автономный мобильный робот, математические модели в пространстве состояний и в операторном виде, ПИД-регулятор.

Аннотация. В докладе представлены математические модели трехколесного мобильного робота на основе аппарата переменных состояния и в операторном виде, на основе которых осуществляется синтез его адаптивной системы управления по методике построения модальных ПИД-регуляторов [1] и метода обратных задач динамики [2].

MATHEMATICAL MODEL FOR THE ADAPTIVE CONTROL OF WHEELED MOBILE ROBOT

Sizykh V.N., Bakanov M.V.

Irkutsk state transport university, Irkutsk

Keywords: autonomous mobile robot, mathematical models in the state space and operator form, PID controller.

Abstract. The report presents mathematical models of a three-wheeled mobile robot based on the apparatus of state variables and in operator form, on the basis of which the synthesis of its adaptive control system is carried out by the method of constructing modal PID-controllers [1] and the method of inverse dynamics problems [2].

Введение

Для описания поведения мобильного робота необходимо разработать его математическую модель. Это позволит без аппаратной реализации мобильного робота проанализировать работу создаваемой системы управления и при необходимости внести необходимые коррективы. Математическая модель мобильного робота состоит из кинематической и динамической моделей. Кинематическая модель является простейшим описанием поведения мобильного робота и допускает исследование его свойств. Динамическая модель является более подробным описанием мобильного робота и учитывает силовые воздействия, произведённые исполнительными механизмами.

1. Динамическая модель мобильного робота

Приводимое математическое описание движения мобильного робота справедливо для случая движения робота по горизонтальной плоскости.

Для того чтобы математически описать мобильный робот, необходимо ввести ряд условий, сформулированных в виде следующих допущений [3]:

- будем рассматривать мобильный робот при условии, что его механизм является жёстко связанным;
- колёса являются недеформируемыми и находятся в точечном контакте с поверхностью;
- движение робота осуществляется без проскальзывания;
- платформа рассматривается как твёрдое тело, на котором закреплена колёсная система.

С учетом принятых допущений нелинейная математическая модель автономного мобильного робота описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi \\ \dot{y} = V \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{V} = \frac{1}{\rho m} (\tau_R + \tau_L) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{2\rho J_C} (\tau_R - \tau_L), \end{cases} \quad (1)$$

где x, y, φ – обобщенные линейные и угловые координаты положения платформы; V, ω – линейная и угловая скорости перемещения платформы; m – масса; ρ – радиус двух ведущих колес; J_C – момент инерции платформы относительно центра масс; τ_R, τ_L – электромагнитные моменты развиваемые электродвигателями.

Далее рассмотрим уравнения движения мобильного робота с учетом динамики следящих приводов.

Рассмотрим случай, когда колёса платформы через редукторы управляются непосредственно двигателями постоянного тока с независимым возбуждением.

Покажем, что учёт наличия следящих приводов не влечёт принципиальных сложностей.

Известно, что составленное по II закону Кирхгофа уравнение баланса напряжений одного электродвигателя (ЭД) постоянного тока имеет вид

$$L\dot{I} + RI + K_w \omega_w = U, \quad (2)$$

где L – индуктивность цепи якоря; I – ток, протекающий в обмотке якоря; R – активное сопротивление обмотки якоря; ω_w – угловая скорость вращения вала ЭД; U – напряжение питания обмотки якоря.

Угловые скорости вращения вала ЭД ω_m и колес связаны соотношением

$$\omega_m = \omega_w i_p, \quad (3)$$

где i_p – передаточные отношения редукторов.

Выражение для момента τ , развиваемого каждым ЭД, имеет вид

$$\tau = K_M I. \quad (4)$$

Здесь K_M, K_W – приведенные конструктивные постоянные ЭД по электромагнитному моменту и угловой скорости его вращения.

С учетом соотношений (3) – (4) уравнение (2) принимает вид

$$\dot{\tau} = -\frac{R}{L}\tau - \frac{K_M K_W i_p}{L}\omega_w + \frac{K_M}{L}U. \quad (5)$$

Так как для правого и левого колес отдельно используются два ЭД постоянного тока, то имеем

$$\begin{cases} \dot{\tau}_L = -\frac{R}{L}\tau_L - \frac{K_M K_W i}{L}\omega_L + \frac{K_M}{L}U_L \\ \dot{\tau}_R = -\frac{R}{L}\tau_R - \frac{K_M K_W i}{L}\omega_R + \frac{K_M}{L}U_R, \end{cases} \quad (6)$$

где U_L, U_R – напряжения, подводимые к электрическим цепям правого и левого колес.

Выразим теперь угловые скорости вращения колес ω_L и ω_R через фазовые координаты. Для этого воспользуемся соотношениями

$$\begin{cases} \omega = \frac{1}{l}(V_R - V_L) \\ V = \frac{1}{2}(V_R + V_L), \end{cases} \quad (7)$$

где V_R, V_L – линейные скорости перемещения правого и левого колес; l – длина оси между колесами.

С учетом того, что $V_L = \omega_L \rho$ и $V_R = \omega_R \rho$, получим

$$\begin{cases} \omega_R = \frac{1}{\rho}\left(V + \frac{\omega l}{2}\right) \\ \omega_L = \frac{1}{\rho}\left(V - \frac{\omega l}{2}\right). \end{cases} \quad (8)$$

После подстановки уравнений (8) в формулы (6) в результате получим полную математическую модель динамики мобильного робота с учетом следующих приводов

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \varphi \\ \dot{y} = V \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \\ \dot{V} = \frac{1}{\rho m}(\tau_R + \tau_L) \\ \dot{\omega} = \frac{1}{2\rho J_C}(\tau_R - \tau_L) \\ \dot{\tau}_L = -\frac{R}{L}\tau_L - \frac{K_M K_W i}{\rho L}\left(V - \frac{\omega l}{2}\right) + \frac{K_M}{L}U_L \\ \dot{\tau}_R = -\frac{R}{L}\tau_R - \frac{K_M K_W i}{\rho L}\left(V + \frac{\omega l}{2}\right) + \frac{K_M}{L}U_R. \end{cases} \quad (9)$$

Модель динамики (9) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений седьмого порядка с фазовым вектором $(x, y, V, \varphi, \omega, \tau_L, \tau_R)$ и вектором управления (U_L, U_R) и может быть непосредственно использована при моделировании на любом алгоритмическом языке программирования. Однако для синтеза законов управления роботом необходимы другие формы представления его математической модели.

Заметим, что в системе уравнений (9) только последние четыре уравнения являются зависимыми между собой, а первые три уравнения представляют собой уравнения связи.

Продифференцируем шестое и седьмое уравнения в системе (9) и с учетом подстановки в них четвертого и пятого уравнений получим

$$\begin{cases} \ddot{\tau}_L + a_{11}\dot{\tau}_L + \left(a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) \tau_R + \left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) \tau_L = b_{11} \dot{U}_L \\ \ddot{\tau}_R + a_{11}\dot{\tau}_R + \left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) \tau_R + \left(a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) \tau_L = b_{11} \dot{U}_R \end{cases} \quad (10)$$

где обозначим: $a_{11} = \frac{R}{L}$, $a_{12} = \frac{K_M K_W i_p}{\rho L}$, $b_{11} = \frac{K_M}{L}$, \dot{U}_L, \dot{U}_R – скорости изменения напряжения питания (управляющий параметр).

Конструктивные параметры трехколесного автономного мобильного робота (рис. 1) представлены в табл. 1.



Рис. 1. Внешний вид робота

Табл. 1. Конструктивные параметры мобильного робота

Параметр	J_C	ρ	m	l	K_W	R	L	i_p
Единицы измерения	кг · см ²	м	кг	м	-	Ом	Гн	-
Числовое значение	$25 \cdot 10^{-5}$	0.0325	1	0.135	0.0080	0.36	$1.23 \cdot 10^{-3}$	55.74

Разработанная математическая модель робота (10) принимается за объект управления.

В матричном виде система уравнений (10) имеет вид

$$\ddot{X} + C\dot{X} + DX = Bu, \quad (11)$$

где $X = (\tau_L, \tau_R)$ – вектор состояния системы; $u = (\dot{U}_L, \dot{U}_R)$ – вектор управления; $C = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix} = \text{diag}\{a_{11}, a_{11}\}$ – диагональная матрица;

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix} = \text{diag}\{b_{11}, b_{11}\}$ – диагональная матрица эффективности управления;

$D = \begin{bmatrix} a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} & a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} & a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \end{bmatrix}$ – симметричная матрица ($D^{-1} = D^T$);

Таким образом, мобильный робот как объект управления является многосвязной (число входов $m = 2$), многомерной ($n = 2$) системой.

2. Управление движением мобильного робота по методике ПИД-регулирования

Для применения методики синтеза ПИД-регулятора и построения Simulink-моделей в среде программирования Matlab необходимо привести математическую модель робота (10) к операторному виду.

а) Частный случай операторной модели робота.

Пусть в исходной модели (10) выполняется условие синхронизации движения колес: $\tau_R = \tau_L$. Тогда угловая скорость движения платформы робота равна заданной $\omega = \omega_3 = \text{const}$, а угол поворота колес равен $\varphi = \omega t$. Это условие выполняется, если в уравнениях (10) модели робота положить

$$d_{12} = a_{12} \frac{1}{\rho m} - \frac{l^2}{4\rho J_C} = 0.$$

При конструировании робота здесь возможны два подхода:

1. Используются стандартные ЭД постоянного тока. Тогда из условия синхронизации целесообразно выбрать длину оси передних ведущих колес робота

$$l = \sqrt{\frac{4K_M^2 i_p J_C}{\rho L m}}.$$

2. Длина оси передних ведущих колес l жестко задана и требуется выбрать характеристики ЭД постоянного тока. Тогда из условия синхронизации выбираются обмоточный коэффициент и конструктивные параметры ЭД

$$K_M = K_W = \frac{l^2}{4i_p J_C}.$$

В обоих случаях уравнения в модели (10) могут быть рассмотрены независимо $\tau = \tau_R = \tau_L$

$$\ddot{\tau} + a_{11}\dot{\tau} + \left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) \tau = b_{11}\dot{U},$$

где $\dot{U}_R = \dot{U}_L = \dot{U}$.

Далее последнее уравнение через замену переменных приводится к нормальной форме Коши $\tau = x_1, \dot{\tau} = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) x_1 - a_{11}x_2 + b_{11}\dot{U} \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad (12)$$

где $x = (x_1, x_2)$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \right) & -a_{11} \end{bmatrix}$; $B = (0, b_{11})$; $u = \dot{U}$.

Применим к уравнениям (12) непрерывное преобразование Лапласа

$$A^*(p)x(p) = Bu(p), \quad (13)$$

где $A^*(p) = (Ip - A) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} & p + a_{11} \end{bmatrix}$; I – единичная матрица

размера 2×2 .

Решение системы алгебраических операторных уравнений определяем по формулам Крамера

$$x_{ij}(p) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta(p)} u_j(p), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

В нашем случае система является многомерной ($n = 2$), но односвязной ($m = 2$), и её детерминант не равен нулю:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} & p + a_{11} \end{vmatrix} = p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} \neq 0,$$

и поэтому система имеет единственное решение (матрица $A^*(p)$ невырожденная).

Частные определители и передаточные функции равны:

$$\Delta_{11}(p) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ b_{11} & p + a_{11} \end{vmatrix} = b_{11}; \quad \Delta_{21}(p) = \begin{vmatrix} p & 0 \\ a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C} & b_{11} \end{vmatrix} = pb_{11};$$

$$W_{11}(p) = W_{\frac{\tau}{\dot{U}}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C}};$$

$$W_{21}(p) = W_{\dot{\tau}}(p) = pW_{11}(p) = pW_{\frac{\tau}{U}}(p);$$

$$\dot{V} = \frac{2}{\rho m} \dot{\tau};$$

$$W_{\frac{\tau}{U}}(p) = \frac{\frac{2}{\rho m} b_{11}}{p^2 + a_{11}p + a_{12} \frac{1}{\rho m} + \frac{l^2}{4\rho J_C}}.$$

б) *Общий случай операторной модели робота.*

Аналогично частному случаю приведем матричные уравнения (11) к нормальной форме Коши через замену переменных $x = x_1, \dot{x} = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Dx_1 - Cx_2 + bu. \end{cases}$$

Здесь $x_1 = (\tau_L, \tau_R)$, $x_2 = (\dot{\tau}_L, \dot{\tau}_R)$.

В блочной форме последние формулы принимают вид

$$\dot{Y} = AY + Bu, \quad (14)$$

где $Y = (x_1, x_2)$ – обобщенный вектор состояния размера 4×1 ; $u = (U_L, U_R)$ – вектор управления размерности 2×1 ;

$$A = \begin{bmatrix} O_{(2 \times 2)} & I_{(2 \times 2)} \\ -D_{(2 \times 2)} & -C_{(2 \times 2)} \end{bmatrix} \quad \text{– блочная матрица при векторе состояния}$$

размера 4×4 ;

$$B = \begin{bmatrix} O_{(2 \times 2)} \\ b_{(2 \times 2)} \end{bmatrix} \quad \text{– блочная матрица при векторе управления размера } 4 \times 2.$$

Через преобразование Лапласа система дифференциальных уравнений преобразуется в систему алгебраических уравнений вида

$$A^{**}(p)Y(p) = Bu(p),$$

где $A^{**}(p) = (Ip - A) = \begin{bmatrix} I_{(2 \times 2)}p & -I_{(2 \times 2)} \\ D_{(2 \times 2)} & I_{(2 \times 2)}p + C \end{bmatrix}$; $I_{(2 \times 2)}$ – единичная матрица.

Так как $\Delta(p) = \det A^{**}(p) \neq 0$, то система является невырожденной и имеет единственное решение, определяемое через наибольший общий делитель нуля (НОД) [4]

$$Y_{ij}(p) = \frac{\Delta_{ij}(p) \text{НОД}_j(p)}{\Delta(p)} u_j(p), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

В нашем случае $n = 4, m = 2$. Поэтому робот как объект управления является многомерным и многосвязным (многоконтурным).

Здесь частный определитель равен $\Delta_{ij}(p) = \det A_{ij}^{**}(p)$, а матрица $A_{ij}^{**}(p)$ определяется через замену в матрице $A^{**}(p)$ i -го столбца на j -ый столбец

свободных членов. Общее решение при m управляющих воздействиях получается, как суперпозиция частных решений

$$x_i(p) = \sum_{j=1}^m x_{ij}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{ij}(p) \text{НОД}_j(p)}{\Delta(p)} u_j = \sum_{j=1}^m W_{ij}(p) u_j,$$

где $\text{НОД}_j(p)$ – наибольший общий делитель по j -ому входу управления.

Таким образом, в общем случае имеют место обобщенные управления и матричные передаточные функции (передаточные матрицы) числителя и знаменателя.

Передаточные функции от управляющих воздействий к моментам правого и левого колеса определяются по формулам:

$$W_{\frac{\tau_R}{U_R}}(p) = \frac{\Delta_{11} \text{НОД}_1(p)}{\Delta(p)},$$

где $\Delta_{11} = b_{11}$;

$$\text{НОД}_1(p) = \text{НОД}_L(p) = p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12} = p^2 + a_{11}p + \frac{l^2}{2\rho J_C}.$$

$$W_{\frac{\tau_L}{U_L}}(p) = \frac{\Delta_{12} \text{НОД}_2(p)}{\Delta(p)},$$

где $\Delta_{12} = b_{11}$;

$$\text{НОД}_2(p) = \text{НОД}_R(p) = p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12} = p^2 + a_{11}p + \frac{2a_{12}}{2\rho m};$$

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \text{НОД}_1(p) \text{НОД}_2(p) = (p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12})(p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12}) = \\ &= \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{2K_w^2 i_p}{\rho^2 mL} \right) \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{l^2}{2\rho J_C} \right). \end{aligned}$$

$$W_{11} = W_{\frac{\tau_L}{U_L}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + d_{11} - d_{12}} = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + \frac{l^2}{2\rho J_C}};$$

$$W_{12}(p) = pW_{11}(p);$$

$$W_{22}(p) = W_{\frac{\tau_R}{U_R}}(p) = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + d_{11} + d_{12}} = \frac{b_{11}}{p^2 + a_{11}p + \frac{2K_w^2 i_p}{\rho^2 mL}};$$

$$W_{21}(p) = pW_{22}(p);$$

На основе математической модели (9) и полученных передаточных функций были разработаны Simulink-модели управляемого мобильного робота с параметрами табл. 1. Для частного случая операторной модели робота Simulink-модель показана на рис. 2.

Коэффициенты ПИД-регулятора выбирались по методике, изложенной в работе [1]: $K_p = 9.5681$, $K_I = 6.3948$, $K_D = 0.6863$. Угол отклонения колес $\varphi = 30^\circ$.

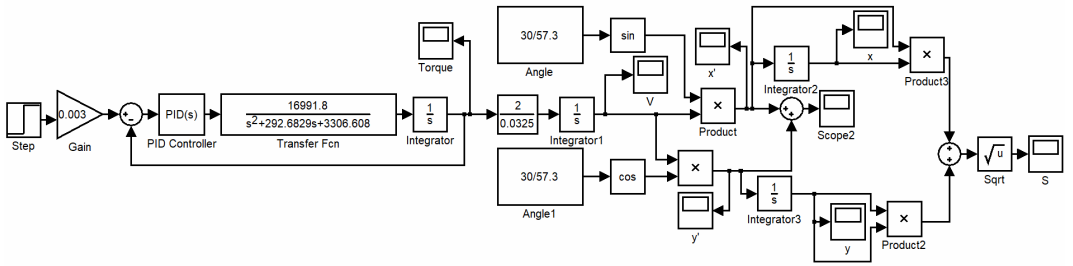


Рис. 2. Simulink-модель при синхронном отклонении колёс мобильного робота

Графики переходных процессов управляющего момента τ от времени t представлен на рис. 3.

График изменения координат скорости V робота и пути S , пройденного роботом, в зависимости о времени t представлены на рис. 4 и 5.

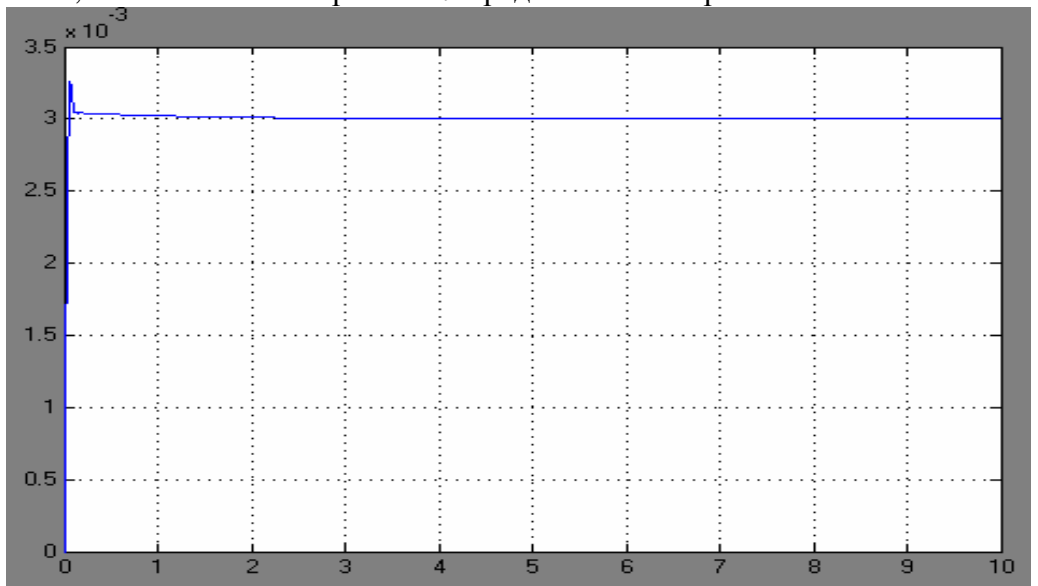


Рис. 3. Управляющий момент τ колесной парой мобильного робота

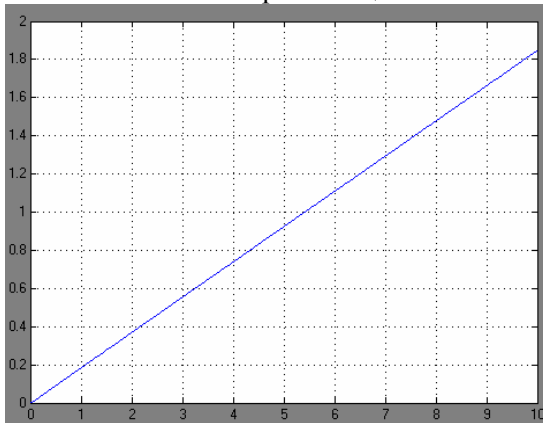


Рис. 4. Изменение скорости V робота в зависимости от времени

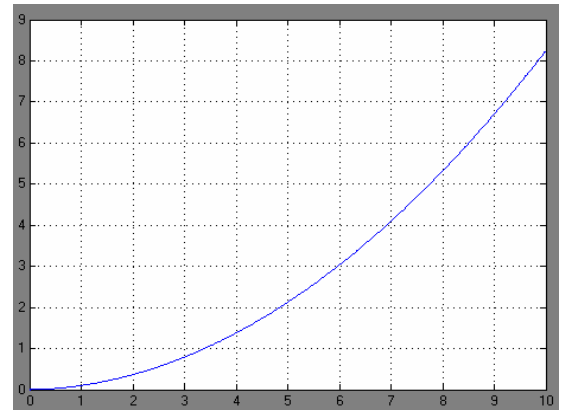


Рис. 5. Изменение пути S , пройденного роботом в зависимости от времени

Заключение. Таким образом, в работе получены следующие основные результаты.

1. Разработаны математические модели мобильного робота в пространстве состояний и в операторной форме.

2. Сформирована Simulink-модель управляемого мобильного робота для частного случая его операторной модели.

Список литературы

1. Сизых В.Н., Лайков М.И., Палатов Д.А. Модальный способ определения параметров ПИД-регулятора редуцированной модели линейного объекта // Информационные системы контроля и управления в промышленности и на транспорте. – Иркутск: Изд-во ИрГУПС, 2015. – Вып. 26. – С. 5-18.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
3. Букреев В.Г. Математическое обеспечение адаптивных систем управления электромеханическими объектами. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 132 с.
4. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Изд-во научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

References

1. Sizykh V.N., Laikov M.I., Palatov D.A. Modal method for determining the parameters of the PID controller of a reduced linear object model // Information systems for control and management in industry and transport. – Irkutsk: Publ. house of ISTU, 2015. – Vol. 26. – P. 5-18.
2. Krutko P.D. Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control. – M.: Mechanical Engineering, 2004. – 576 p.
3. Bukreev V.G. Mathematical support of adaptive control systems of Electromechanical objects. – Tomsk: TPU publ. house, 2002. – 132 p.
4. Bukov V.N. Embedding systems. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems. – Kaluga: Publ. house of scientific literature by N.F. Bochkareva, 2006. – 720 p.

Сведения об авторах:

Information about authors:

Сизых Виктор Николаевич – д.т.н., доцент, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов»	Victor N. Sizykh – doctor of technical sciences, associate professor, professor of department “Automation of production processes”
Баканов Максим Витальевич – магистрант	Maxim V. Bakanov – graduate student
Иркутский государственный университет путей сообщения, г.Иркутск	Irkutsk state transport university, Irkutsk

Получена 01.11.2018