УДК 519.3:05.011.56:621.865.8 https://doi.org/10.26160/2658-6185-2019-2-21-24

ПЕРЕНОСНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Бохонский А.И.
Севастопольский государственный университет, г. Севастополь

Ключевые слова: упругая система, степени свободы, переносное и относительное движение, оптимальное управление, колебания.

Аннотация. Рассмотрено динамическое поведение (колебания в относительном движении) системы с двумя степенями свободы без учета линейно-вязкого сопротивления при оптимальном переносном движении. Для упругой системы создана структурная модель в Simulink решения системы дифференциальных уравнений, с использованием, в том числе, метода главных координат.

PORTABLE OPTIMUM ELASTIC MOVEMENT SYSTEMS

Bokhonsky A.I.
Sevastopol State University, Sevastopol

Keywords: elastic system, degrees of freedom, figurative and relative motion, optimal control, vibration study.

Abstract. On the example of systems with two degrees of freedom without taking into account linear-viscous resistance, the dynamic behavior (oscillations in relative motion) with optimal transport motion is studied. In the study of the elastic system, a structural diagram was created in Simulink to solve a system of differential equations, using, among other things, the principal coordinate method.

Теории колебаний линейных систем посвящены труды [1-7]. Решение задач конструирования оптимальных управлений перемещением упругих систем приведено в работах [9-14].

Разложение движения линейной системы с конечным числом степеней свободы по формам собственных колебаний путем введения главных координат позволило в Simulink решить независимо отдельные уравнения по каждой главной координате с последующим преобразованием в физические координаты. Уравнения колебаний системы с n степенями свободы в главных координатах:

$$\frac{d^2q_k}{dt^2}+\omega_k^2 q_k=\frac{Q_k(t)}{M_k},\ (k=1,\ldots,n),$$

где $n=2$, $Q_k(t)=\sum_{i=1}^{n} F_i(t)v_{ik}$ – обобщенная сила, $M_k=\sum_{i=1}^{n} m_i \nu_{ik}^2$ – обобщенная масса. Физические координаты выражаются через главные $x_i(t)=\sum_{k=1}^{n} q_k(t)v_{ik}$.

Обозначения: v_{ik} – амплитудное смещение i-й массы в k-й форме колебаний; ω_k – частота собственных колебаний. Алгоритм метода главных координат иллюстрируется на примере механической системы, схема которой изображена на рисунке 1.

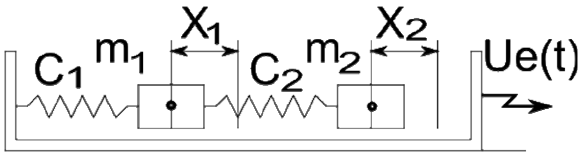


Рис. 1. Схема переносного движения системы с ускорением *Ue(t)*

Уравнения колебаний:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+(C_1+C_2)x_1-C_2x_2=m_1U_1(t),$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-C_2x_1+C_2x_2=m_2U_2(t), \tag{1}$$

где m_1 и m_2 – сосредоточенные массы; C_1, C_2 – коэффициенты жесткости; x_1, x_2 – координаты; $U_1=U_2=U_e$ – управление (ускорение) переносного движения.

Из (1) получена однородная система

$$\begin{cases}(C_1+C_2-m_1\omega^2)A_1-C_2A_2=0,\\ -C_2A_1+(C_2-m_2\omega^2)A_2=0,\end{cases} \tag{2}$$

частотный определитель которой

$$\begin{vmatrix}C_1+C_2-m_1\omega^2 & -C_2\\ -C_2 & C_2-m_2\omega^2\end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

Амплитудные смещения ν_{ik} i –й массы, где k – номер формы колебаний,

$$\nu_{11}=1; \qquad \nu_{12}=1;$$
$$\nu_{21}=\frac{C_1+C_2-m_1\omega_1^2}{C_2}; \quad \nu_{22}=\frac{C_1+C_2-m_1\omega_2^2}{C_2}.$$

Физические координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выражаются через главные:

$$x_1(t)=\nu_{11}q_1(t)+\nu_{12}q_2(t), \qquad x_2(t)=\nu_{21}q_1(t)+\nu_{22}q_2(t).$$

Уравнения в главных координатах:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\omega_1^2q_1=\frac{Q_1(t)}{M_1}, \qquad \frac{d^2q_2}{dt^2}+\omega_2^2q_2=\frac{Q_2(t)}{M_2},$$

где обобщенные силы $Q_1(t)=U_1\nu_{11}+U_2\nu_{12}$, $Q_2(t)=U_1\nu_{21}+U_2\nu_{22}$; обобщенные массы $M_1=m_1\nu_{11}^2+m_2\nu_{21}^2$, $M_2=m_1\nu_{12}^2+m_2\nu_{22}^2$.

Исходные данные: m_1 =40 кг; m_2 =10 кг; C_1 =2000 Н/м; C_2 = 1000 Н/м. Для переносного движения системы: L = 1 м; $p=\omega_1/2\,\text{c}^{-1}$. Принято оптимальное [10,12] управление $U_1=U_2=U_e=-\frac{Lp^2}{2\pi}\sin(pt)=-1{,}4308\sin(2{,}9984t)$.

Частоты собственных колебаний $\omega_1=5{,}9968\,\text{c}^{-1}$; $\omega_2=11{,}7915\,\text{c}^{-1}$, которым соответствуют периоды: $T_1=1{,}0478\,\text{c}$; $T_1=0{,}5329\,\text{c}$. Коэффициенты форм: $\nu_{21}=1{,}516$; $\nu_{22}=-2{,}5616$. Обобщенные массы: $M_1=50\,\text{кг}$; $M_2=105{,}615\,\text{кг}$. Структурная схема изображена на рисунке 2.

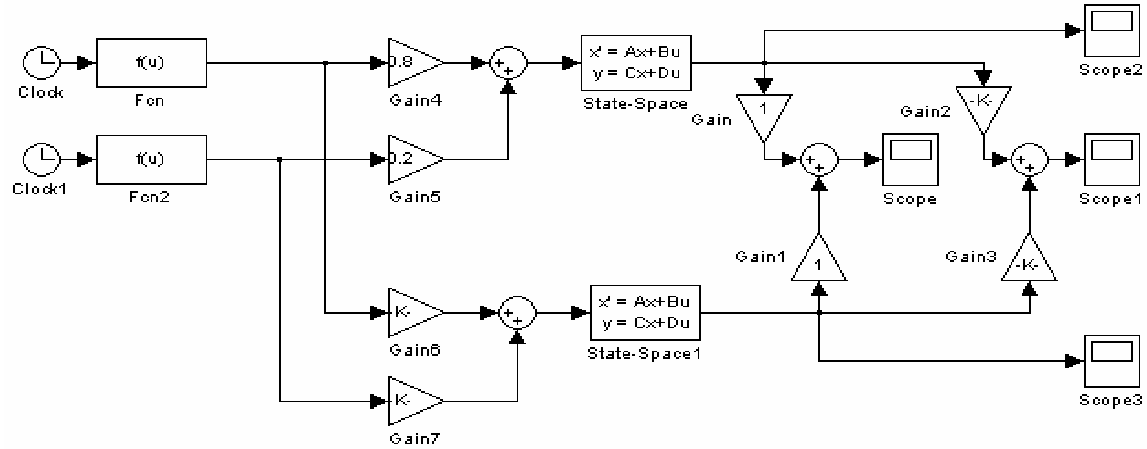
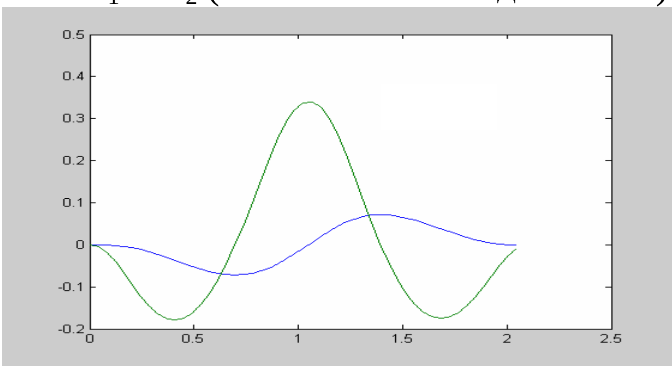


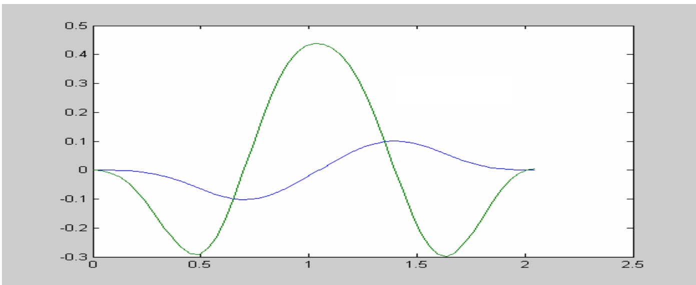
Рис. 2. Структурная схема, построенная с использованием метода главных координат

На рисунке 3 изображены графики перемещения и скорости сосредоточенных масс m_1 и m_2 (в относительном движении).



t, c

$x_2(t), V_2(t)$



t, c

Рис. 3. Относительные перемещения и скорости сосредоточенных масс

Для времени $T = 2T_1$, которое соответствует двум периодам первого тона колебаний, с учетом отключения U_e наблюдается абсолютный покой сосредоточенных масс. Структурная схема, построенная в Simulink (рисунок 4), позволяет исследовать поведение системы в исходных физических координатах. С целью проверки использования метода главных координат выполнено непосредственное численное интегрирование исходной системы дифференциальных уравнений (1), которая для численных данных записана в форме Коши.

При нулевых начальных условиях графики численного интегрирования для относительных перемещений сосредоточенных масс $x_1(t)$ и $x_2(t)$ практически совпадают с предыдущими вычислениями.

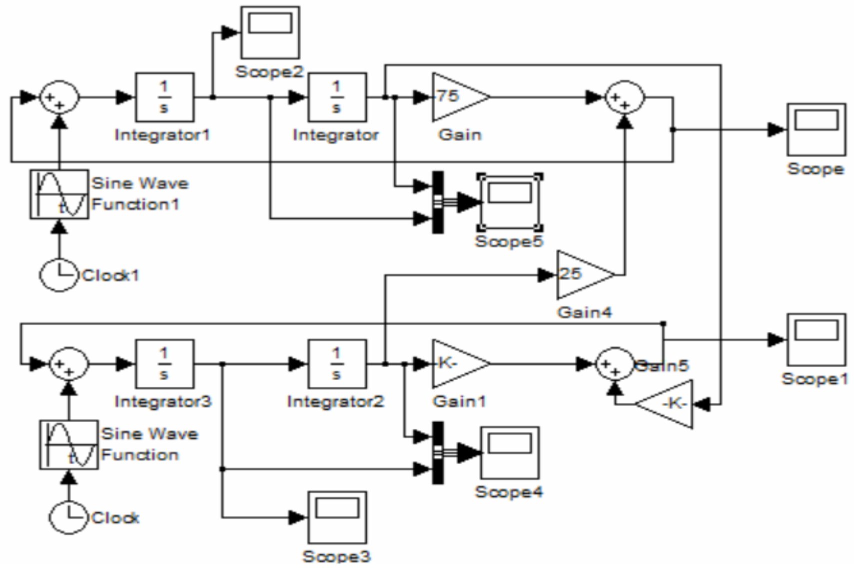


Рис. 4. Структурная схема непосредственного аналитического решения исходной системы уравнений относительного движения

Достижение переносного и относительного покоя в момент времени $t=T$ свидетельствует о наступлении абсолютного покоя. Результаты исследований являются составной частью проектирования упругих систем с заданными динамическими свойствами.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
2. Бернштейн С.А. Основы динамики сооружений. – М.: Госстройиздат, 1938. – 160 с.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
5. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко. – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.
6. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.И. Почтман. – К.: Вища школа, 1982. – 116 с.
7. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. Под общ. ред. А.И. Бохонского. – Севастополь: Изд-во Сев ГТУ, 2007. – 296с.
8. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: монография / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – 212 с.
9. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления. – Германия: Palmarium Academic Publishing, 2013. – 77 с.
10. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
11. Бохонский А.И. Управление движением системы с заданными частотами / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, Т.В. Мозолевская // Механика, автоматика и робототехника. – 2018. – №2. – С. 7-13.
12. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // А.И. Бохонский. Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.

Сведения об авторе:

Бохонский Александр Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры технической механики и машиноведения СевГУ, г.Севастополь.