УДК 621.01 https://doi.org/10.26160/2658-6185-2019-2-12-15

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЗМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Адамович Н.О., Куклин С.А.
Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк

Ключевые слова: кинетическая энергия, уравнение Лагранжа, обобщенные координаты.
Аннотация. В статье излагаются вопросы, относящиеся к методике построения динамической модели механизма с жесткими звеньями. Рассмотрен пример определения кинетической энергии механизма через обобщенные скорости и координаты.

ON THE DETERMINATION OF THE KINETIC ENERGY OF THE MECHANISM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

Adamovich N.O., Kuklin S.A.
Siberian state industrial university, Novokuznetsk

Keywords: kinetic energy, Lagrange equation, generalized coordinates.
Abstract. The article presents the issues related to the methodology of constructing a dynamic model of a mechanism with rigid links. An example of determining the kinetic energy of a mechanism through generalized velocities and coordinates is considered.

Одной из основных задач динамики является изучение закона движения механизма под действием заданных сил [1]. При решении задач кинематики предполагается, что движение ведущего звена происходит с постоянной угловой скоростью. В действительности движение ведущего звена является функцией действующих сил и масс звеньев. При проектировании машины определение истинного закона движения необходимо для учета динамических нагрузок. Машины, работающие при высоких нагрузках и скоростях, будут испытывать значительные перегрузки элементов конструкции, что снизит их надежность.

Одной из удобных форм уравнения движения механизма является уравнение Лагранжа второго рода, составленное в независимых обобщенных координатах для системы с голономными связями.

При составлении уравнения Лагранжа приходится, прежде всего, разыскивать выражение кинетической энергии через обобщенные скорости и координаты, а в случае нестационарных связей и через время.

Как известно, обобщенными координатами называются независимые координаты, полностью описывающие положение каждой точки системы. Таким образом, число обобщенных координат, равное числу степеней подвижности, является также минимальным числом координат, которыми можно описать все возможные положения голономной системы. Первая производная обобщенной координаты называется обобщенной скоростью.

Задача определения кинетической энергии через обобщенные координаты и инерционные коэффициенты рассматривалась в статье [2]. Рассмотрим практический прием определения инерционных коэффициентов в выражении кинетической энергии для конкретной системы.

Обратимся к механизму с одной степенью подвижности (H=1), звенья которого можно считать жесткими.

Пусть q – обобщенная координата, определяющая положение входного звена. Определим кинетическую энергию механизма как системы n материальных точек с голономными стационарными связями.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \tag{1}$$

В системе с одной степенью свободы координаты всех точек могут быть представлены как функции от обобщенной координаты q:

$$x_k = x_k(q),\ y_k = y_k(q),\ z_k = z_k(q). \tag{2}$$

Отсюда

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dq}\dot{q},\ \dot{y}_k = \frac{dy_k}{dq}\dot{q},\ \dot{z}_k = \frac{dz_k}{dq}\dot{q}. \tag{3}$$

Подставим (3) в (1)

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^2\sum_{k=1}^{n} m_k\left[\left(\frac{dx_k}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dq}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\dot{q}^2 a_{11}. \tag{4}$$

Здесь a_{11} – инерционный коэффициент [2]:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{n} m_k\left[\left(\frac{dx_k}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dq}\right)^2\right], \tag{5}$$

в практических расчетах являющийся приведенной массой $m_П(q)$ (если q – линейная координата) или приведенным моментом инерции $J_П(q)$ (если q – угловая координата) механизма с одной степенью свободы. Для определения приведенной массы (момента инерции) необходимо знать производные от функций положения по координате q. Для плоских механизмов можно определить эти производные с помощью плана скоростей.

Рассмотрим плоский механизм с пятью подвижными звеньями (рис. 1,а).

Кинетическая энергия данного механизма состоит из кинетических энергий кривошипа, кулисы, шатуна и ползуна. Кинетическая энергия кривошипа определяется по формуле $T_1 = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_2$, где J_1 – момент инерции кривошипа относительно оси О; q – угол поворота кривошипа.

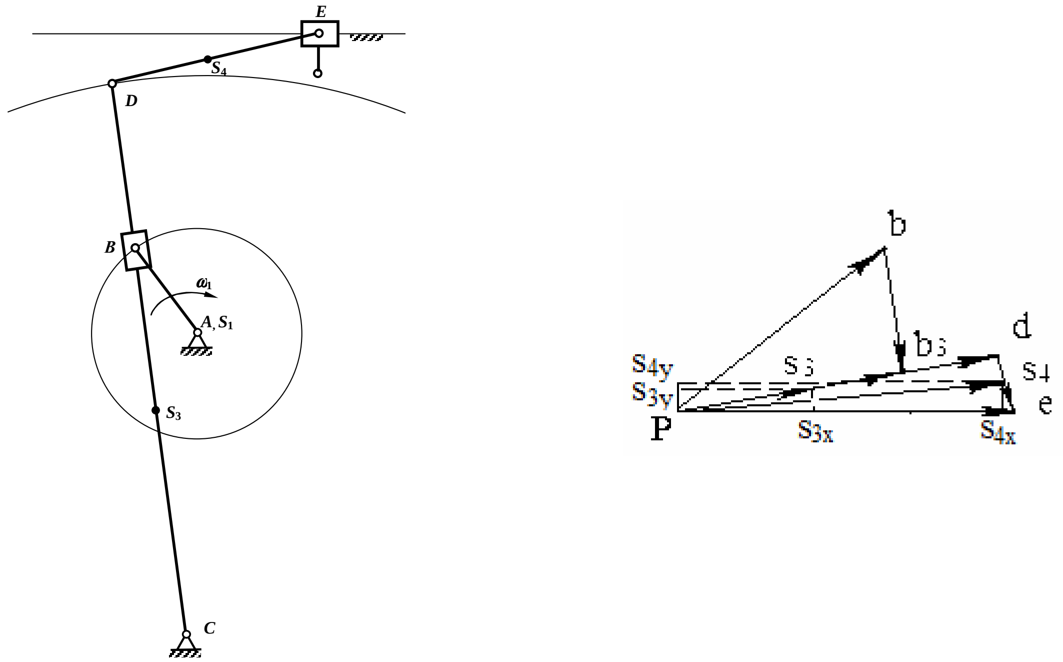
Кулиса совершает вращательное движение относительно оси O_3 на неполный оборот. Кинетическая энергия этого звена определится по формуле:

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_3 V_{S3}^2 + J_{S3}\dot{\varphi}_3^2), \tag{6}$$

где J_{S3} – момент инерции звена 3 относительно оси, проходящей через центр масс, φ – угол поворота звена 3, V_{S3} – скорость его центра масс.

Учитываем, что

$$V_{S3}^2 = \left[\left(\frac{dx_{S3}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S3}}{dq}\right)^2\right]\dot{q}^2;\ \dot{\varphi}_3^2 = \left(\frac{d\varphi_3}{dq}\right)^2\dot{q}^2. \tag{7}$$



а) б)

Рис. 1 – К определению приведенного момента инерции;
(а) плоский стержневой механизм, (б) план скоростей

Тогда

$$T_3 = \frac{1}{2}\dot{q}^2\left\{ m_3\left[\left(\frac{dx_{S3}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S3}}{dq}\right)^2\right] + J_{S3}\left(\frac{d\varphi_3}{dq}\right)^2 \right\}. \tag{8}$$

Шатун 4 совершает сложное плоское движение, для него по теореме Кенига:

$$T_4 = \frac{1}{2}(m_4 V_{S4}^2 + J_{S4}\dot{\varphi}_4^2). \tag{9}$$

где J_{S4} – момент инерции звена 4 относительно оси, проходящей через центр масс, φ_4 – угол поворота звена 4, V_{S4} – скорость его центра масс, т.е.

$$T_4 = \frac{1}{2}\dot{q}^2\left\{ m_4\left[\left(\frac{dx_{S4}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S4}}{dq}\right)^2\right] + J_{S4}\left(\frac{d\varphi_4}{dq}\right)^2 \right\}. \tag{10}$$

Для поступательно движущегося звена 5 имеем:

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_E^2. \tag{11}$$

Следовательно, кинетическая энергия механизма:

$$T_3 = \frac{1}{2}\dot{q}^2\left\{ I_1 + m_3\left[\left(\frac{dx_{S3}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S3}}{dq}\right)^2\right] + J_{S3}\left(\frac{d\varphi_3}{dq}\right)^2 + m_4\left[\left(\frac{dx_{S4}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S4}}{dq}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + J_{S4}\left(\frac{d\varphi_4}{dq}\right)^2 + m_5\left(\frac{dx_E}{dq}\right)^2 \right\}. \tag{12}$$

Приведенный момент инерции механизма:

$$I_{ПР} = I_1 + m_3\left[\left(\frac{dx_{S3}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S3}}{dq}\right)^2\right] + J_{S3}\left(\frac{d\varphi_3}{dq}\right)^2 + m_4\left[\left(\frac{dx_{S4}}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy_{S4}}{dq}\right)^2\right] + \\ + J_{S4}\left(\frac{d\varphi_4}{dq}\right)^2 + m_5\left(\frac{dx_E}{dq}\right)^2. \quad (13)$$

Для определения производных от функции положения в данном выражении строится план скоростей (рисунок 1,б) для рассматриваемого положения механизма при $\dot{q} = 1$. Из плана скоростей, построенного в масштабе μ_V:

$$\frac{dx_{S3}}{dq} = Ps_{3x}\mu_V;\ \frac{dy_{S3}}{dq} = Ps_{3y}\mu_V;\ \frac{dx_{S4}}{dq} = Ps_{4x}\mu_V;\ \frac{dy_{S4}}{dq} = Ps_{4y}\mu_V;$$
$$\frac{dx_E}{dq} = Pe\mu_V;\ \frac{d\varphi_3}{dq} = \frac{Pb_3}{l_{BC}}\mu_V;\ \frac{d\varphi_4}{dq} = \frac{de}{l_{DE}}\mu_V. \quad (14)$$

Таким образом, функция $J(\varphi)$ приведенного момента инерции находится с помощью геометрических построений. Представление ее в аналитической форме сопряжено с достаточными сложностями и имеет громоздкий вид.

Список литературы

1. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263с.
2. Адамович Н.О. О составлении математической модели механизма // Journal of Advanced Research in Natural Science. – 2017. – Issue 2. – P.29-33.

Сведения об авторах:
Адамович Наталья Олеговна – к.т.н., доцент, доцент кафедры механики и машиностроения, СибГИУ, г.Новокузнецк;
Куклин Сергей Александрович – к.т.н., доцент, доцент кафедры механики и машиностроения, СибГИУ, г.Новокузнецк.