УДК 62.752, 621.534.833; 888.6 https://doi.org/10.26160/2618-6810-2019-2-50-57

ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД В СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ВВЕДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ, СТРУКТУРНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Елисеев А.В.[1], Кузнецов Н.К.[2], Николаев А.В.[3]

[1,3]Иркутский государственный университет путей сообщения,

[2]Иркутский национальный исследовательский технический университет,

г. Иркутск

Ключевые слова: механические колебательные системы, структурные образования, распределения амплитуд колебаний, дополнительные связи, узлы колебаний, диады.

Аннотация. Развиваются методологические позиции описания характерных особенностей структурных образований, так называемых диад, в механических колебательных системах. Цель работы заключается в разработке метода построения математических моделей для оценки динамических особенностей свободных колебаний диады в условиях обеспечения специального распределения амплитуд колебаний, обеспечивающего наличие характерных точек. Разработана формализованная концепция обоснования существования характерных точек для системы с двумя степенями свободы с дополнительной связью, реализованной устройством преобразования движений. На примере распределения амплитуд, формирующих узел колебания, показана зависимость структурных и динамических особенностей колебательной системы от параметра устройства преобразования движения. Представляются аналитические соотношения, характеризующие чувствительность положения узла колебания от параметров системы. Приводятся результаты вычислительного моделирования; сформировано заключение о возможных направлениях развития спектра динамических свойств.

Введение. В настоящее время задачи динамики машин, работающих в условиях интенсивного динамического нагружения, приобретают большую актуальность в связи с необходимостью обеспечения надежности и качества реализации производственных процессов. Ряд существенных свойств машин отрабатывается уже на стадиях выбора и обоснования принципиальных конструкторских решений, что находит отражение в расчетных схемах в виде механических колебательных систем. Задачи оценки особенностей динамических эффектов с использованием расчетных схем в виде механических колебательных систем характерных как для технологических вибрационных машин, а так же для многих транспортных устройств различного назначения, предполагают использование методов математического моделирования.

Характерная детализация позиций в области оценки динамических свойств машин представлена в работах [1-3]. Вместе с тем, ряд вопросов в динамике механических колебательных систем ещё не получил должного внимания, связанного с появлением динамических эффектов в структурных образованиях, получивших название диад [4,5. Под диадами в рассматриваемых работах понимаются структурные образования, обладающие характерными и идентифицируемыми свойствами, которые определяют спектр динамических особенностей механических колебательных систем [6,7].

В представленной статье рассматривается ряд основных положений, отражающих фундаментальные свойства диад, их особенности и характерные формы проявления динамических свойств.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается структурное образование в форме диады, представляющее собою механическую колебательную систему с двумя степенями свободы, содержащую дополнительную связь, реализованную устройством преобразования движения с массоинерционной характеристикой L (рис.1).

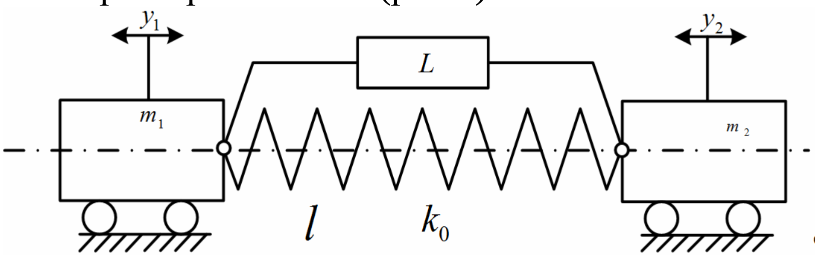


Рис. 1. Расчетная схема диады с дополнительной связью, реализованной устройством преобразования движений

Массоинерционные элементами m_1 и m_2, образующие диаду, соединены пружиной с жесткостью k, длиной l и совершают свободные колебания относительно статических положений под действием начальных ненулевых смещений. Начальные скорости равны нулю, внешние воздействия отсутствуют.

В процессе свободных колебаний диады, в структуре механической колебательной системы возможно возникновение характерных точек, обладающих специальными свойствами. К таким точкам можно отнести, к примеру, неподвижные точки, или, равномерно движущиеся, точки, представляющие собой центры масс, узлы колебаний и т.д.

В качестве характерной особенности формирования структурных и динамических свойств колебательной системы интерес представляет роль дополнительных связей, введенных в структуру диады с помощью устройства преобразования движения.

Задача исследования заключается в разработке метода определения структурных и динамических свойств диады с учетом дополнительных связей в процессе свободных колебаний.

II. Математическая модель. В качестве обобщенных координат используются величины y_1 и y_2 смещений относительно положений статического равновесия:

$$y_1 = y_{r1} - y_{s1} \ , \ y_2 = y_{r2} - y_{s2} \ . \qquad (1)$$

где y_{r1}, y_{r2} - координаты положений масс m_1, m_2; y_{s1}, y_{s1} - положении статического равновесия масс m_1, m_2, при условии, что упругий элемент не деформирован, т.е. $y_{s2}=y_{s1}+l$.

Потенциальная и кинетическая энергия в обобщенных координатах имеют вид:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_0(y_2 - y_1)^2, \mathrm{T} = \frac{1}{2}m\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2{}^2 + \frac{1}{2}L(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2. \qquad (2)$$

Уравнение Лагранжа 2-ого рода в изображениях имеет вид:

$$\begin{pmatrix} (m_1+L)p^2+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & (m_2+L)p^2+k_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (m_1+L)py_{10} \\ (m_2+L)py_{20} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где y_{10}, y_{20} - начальные смещения.

Положение характерной точки $y_{L,\lambda}$ с нулевой скоростью находится из условий:

$$\dot{y}_{L,\lambda}=\lambda_1\dot{y}_1+\lambda_2\dot{y}_1=0, \qquad (4)$$

где искомая точка выбирается из семейства $y_{L,\lambda}=\lambda_1 y_1+\lambda_1 y_1$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

В изображениях условие (4) принимает вид:

$$p(\lambda_1\bar{y}_1+\lambda_2\bar{y}_2)=\lambda_1 y_1(0)+\lambda_2 y_2(0). \qquad (5)$$

Условия совместности системы уравнений (3) и линейного выражения (5) влечет тождественное равенство нулю определителя соответствующей расширенной системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 p & \lambda_2 p & \lambda_1 y_{10}+\lambda_2 y_{20} \\ (m_1+L)p^2+k_0 & -k_0 & (m_1+L)py_{10} \\ -k_0 & (m_2+L)p^2+k_0 & (m_2+L)py_{20} \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Тождественное равенство нулю определителя (6) эквивалентно условиям

$$k_0(y_{10}-y_{20})(L\lambda_1-L\lambda_2+\lambda_1 m_2-\lambda_2 m_1)=0. \qquad (7)$$

Если $y_{10}-y_{20}=0$, то колебание диады не реализуется. Если $y_{10}-y_{20}\neq 0$, то выполняется равенство $L\lambda_1-L\lambda_2+\lambda_1 m_2-\lambda_2 m_1=0$, которое с учетом условия $\lambda_1+\lambda_2=1$ определяет параметры λ_1, λ_2:

$$\lambda_1=\frac{m_1+L}{m_1+m_2+2L},\ \lambda_2=\frac{m_2+L}{m_1+m_2+2L}. \qquad (8)$$

Параметры (8) задают положение характерной точки, в данном случае представляющей собой узел колебания.

III. Распределение амплитуд колебания масс диады с учетом устройства преобразования движения. Без ограничения общности полагается, что для масс выполнено неравенство $m_1\leq m_2$. С учетом требования безударного режима свободных колебаний справедлива система неравенств:

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\leq\frac{m_1+L}{m_1+m_2+2L}\leq\frac{1}{2}\leq\frac{m_2+L}{m_1+m_2+2L}\leq\frac{m_2}{m_1+m_2}. \qquad (9)$$

В свою очередь, условия (9) определяют соотношения между амплитудами колебаний A_1, A_2 и $A_{1,L}, A_{2,L}$:

$$|A_1|\geq|A_{1,L}|\geq\frac{|y_{20}-y_{10}|}{2}\geq|A_{2,L}|\geq|A_2|, \qquad (10)$$

где $A_{1,\mathrm{L}}=-\dfrac{(m_2+L)(y_{20}-y_{10})}{m_1+m_2+2L}$, $A_{2,L}=\dfrac{(m_1+L)(y_{20}-y_{10})}{m_1+m_2+2L}$ -амплитуды колебаний массоинерционных элементов m_1 и m_2, $A_1=A_{1,0}$, $A_2=A_{2,0}$.

Система неравенств (10) показывает, что добавление устройства преобразования движения в диаду изменяет амплитуды колебаний элементов и задает систему соотношений между амплитудами.

Аналогично, условия (9) определяют соотношения между геометрическими характеристиками положения узла колебаний в соответствии с неравенствами:

$$l_1 \geq l_{1,L} \geq \frac{l}{2} \geq l_{2,L} \geq l_2, \tag{11}$$

где $l_{1,L}, l_{2,L}$ - расстояния от масс m_1, m_2 до характерной точки, при рассмотрении диады в положении статического равновесия, $l_1 = l_{1,0}$, $l_2 = l_{2,0}$.

Система соотношений (11) может быть охарактеризована величиной Δl, которая является оценкой вариативности геометрических характеристик диады при изменении массоинерционной характеристики L устройств преобразования движения в диапазоне $[0, \infty)$:

$$\Delta l = \lim_{L \to 0} l \frac{m_2 + L}{m_1 + m_2 + 2L} - \lim_{L \to \infty} l \frac{m_2 + L}{m_1 + m_2 + 2L} = \frac{l}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \tag{12}$$

Если L полагать фиксированным, то величина диапазона изменения переменной $l_{1,\hat{L}}$ при изменении $\hat{L} \in [0, L]$ составляет:

$$\Delta l_0 = l_{1,L} - l_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{2L}{m_1 + m_2 + 2L} l. \tag{13}$$

В свою очередь, величина диапазона изменения переменной $l_{1,\hat{L}}$ при изменении $\hat{L} \in [L, \infty]$ составляет:

$$\Delta l_\infty = l_{1,\infty} - l_{1,L} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + 2L} l. \tag{14}$$

Для Δl_∞ и Δl_0 справедливо выполнение равенства:

$$|\Delta l_\infty| + |\Delta l_0| = \Delta l. \tag{15}$$

Отношение величин Δl_∞ к Δl_0 составляет:

$$\lambda = \frac{\Delta l_\infty}{\Delta l_0} = -\frac{1}{2} \frac{m1 + m2}{L}. \tag{16}$$

Представленная выражением (16) величина λ отражает особенности зависимости массоинерционных характеристик диады при варьировании параметра L из текущего состояния до нуля и до бесконечности.

В качестве характеристики чувствительности положения характерной точки диады к изменению массоинерционного параметра устройства преобразования движения L может быть рассмотрена функция $\frac{\partial l_{1,L}}{\partial L}$:

$$\frac{\partial l_{1,L}}{\partial L} = -\frac{(m_2 - m_1) l}{(m_1 + m_2 + 2L)^2}. \tag{17}$$

Наличие в числителе выражений (12) и (17) разницы масс $m_2 - m_1$ позволяет интерпретировать асимметрию масс как фактор вариативности динамических и структурных характеристик диады.

IV. Структурные и динамические особенности диады в зависимости от параметра дополнительной связи. Динамическое состояние, формируемое свободным движением, определяется рядом вышеприведенных неравенств и выражений (10),(11),(17).

Общие представления об особенностях расположения характерных точек дают трехмерные графики на рис. 2, где по оси абсцисс откладывается время процесса колебания, по оси ординат откладывается значение параметра L , по оси аппликат – значения обобщенных координаты двух масс диады и положение характерной точки для каждого момента времени $t \in [0..1]$ и значения $L \in [0..20]$.

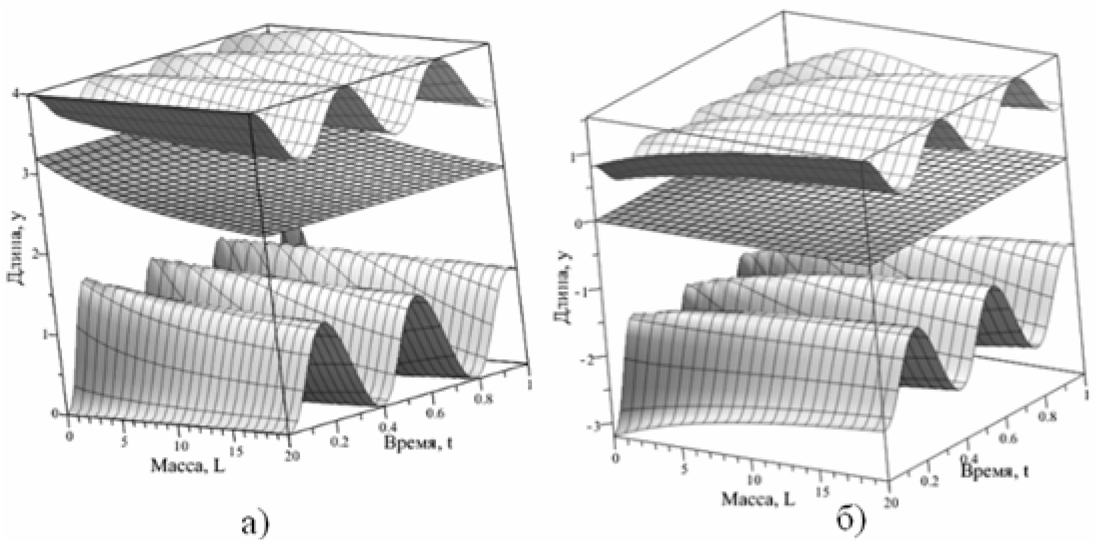
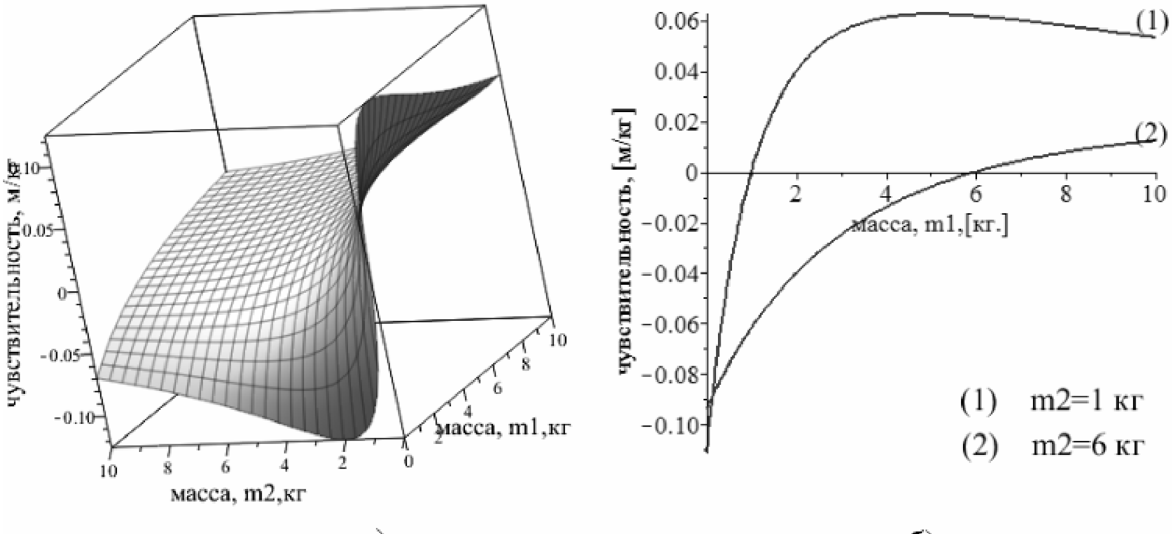


Рис. 2. Поверхности координат масс диады и положения характерной точки в зависимости от параметра L и момента времени t: а) семейство диад «приведено» к общему пространственному интервалу, б) семейство диад «приведено» к общей характерной точке

На рисунке 2а) семейство диад приведено к общему пространственному интервалу, границы которого определяют крайние положения колеблющихся масс. Зажатая между синусоидальными поверхностями монотонно убывающая поверхность по параметру L отражает тенденцию смещения характерной точки к средней точке диады. На рисунке 2б) представлено то же семейство диад, в которых характерная точка установлена в нулевую аппликату. В таком варианте представления семейства диад синусоидальные поверхности, монотонные по параметру $L \in [0..20]$, отражают тенденцию к изменению, занимаемого диадой, пространственного интервала, зависящего от величины $m_2 - m_1$, характеризующей асимметрию диады. При более детальном рассмотрении рисунков 2а) и 2б) следует отметить увеличение периода колебаний диады с ростом массоинерционного параметра L.

В свою очередь, особенности восприимчивости рассматриваемых характеристик диады к изменению параметра L отражаются функцией чувствительности (17). Структура выражения (17), определяющая чувствительность положения неподвижной точки при свободных колебаниях к параметру L, такова, что при малых значениях L в окрестности малых масс m_1, m_2 могут наблюдаться существенные изменения локальных свойств чувствительности системы. При дальнейшем увеличении масс тенденции к локальным существенным изменениям свойств уже не наблюдаются. На рисунке 3 построены графики функции чувствительности в зависимости от масс m_1, m_2 элементов диады.

Если воспользоваться изометрическим графиком функции чувствительности (рис.3а) и провести секущие плоскости $m_2 = 1\,кг$ и $m_2 = 6\,кг$, то будут получены графики зависимостей представленные на рис. 3б).



а) б)

Рис. 3. Чувствительность положения характерной точки диады ($l = 1\,м$): а) график чувствительности в зависимости от масс диады при фиксированном параметре $L = 1\,кг$, б) график чувствительности на интервале $m_1 \in [0..10]$, линия (1) $m_2 = 1\,кг$, линия (2) $m_2 = 6\,кг$

К особенностям полученных графиков следует отнести наличие точек с нулевой чувствительностью, где происходит пересечение графиком оси абсцисс, и точек с экстремальной чувствительностью, где реализуется локальный максимум при изменении массы m_1.

С учетом вышеприведенных данных анализ выражений (10), (11), (17) позволяет выделить существование определенной структуры отношений в диаде. Таким образом, в режиме свободных колебаний заданных начальными смещениями, по мере увеличения параметра L будут наблюдаться структурные изменения диады, отражающиеся в изменении амплитуд колебаний и в перераспределении положения характерной точки. В свою очередь, динамические изменения связаны с изменением частоты свободных колебаний диады по мере роста параметра L.

Заключение. Предложена формализованная концепция обоснования существования характерных точек и характерных режимов диады. Под характерным режимом авторами понимается режим свободных колебаний диады, который совершается вокруг точки, обладающей некоторыми свойствами: характерная точка неподвижна в заданной системе координат, при условии, что начальные скорости равны нулю; характерная точка интерпретируется как узел колебаний; характерная точка обладает тем свойством, что определяет границы физической реализации диады.

На основе разработанного метода определения параметров начальных возмущений, при которых возможна реализация характерной форма движения элементов диады, показано, что положение неподвижной точки, определяющее форму свободных движений, зависит от параметров дополнительной связи и может изменяться в зависимости от параметров устройства преобразования движения, что предопределяет возможность настройки или корректировки динамических свойств диады.

Показано, что динамические и структурные особенности диады, отражающие представления о характерных точках и режимах колебаний, предопределяются асимметрией массоинерционных элементов диады в соотношении с массоинерционными параметрами дополнительных связей.

Работа выполнена в рамках НИОКТР «Разработка методов для оценки динамических свойств движений элементов механических колебательных систем с учетом связности движений и проявления их форм самоорганизации при действии вибрационных возмущений» № АААА-А16-116112350118-4.

Список литературы

1. Ганиев Р.Ф. Колебания твердых тел / Р.Ф. Ганиев, В.О. Кононенко. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для техн. спец. вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
3. Кузнецов Н.К. Динамика управляемых машин с дополнительными связями. – Иркутск, 2009. – 290 с.
4. Елисеев А.В. Диады в механических системах: особенности динамических свойств. Часть I. / А.В. Елисеев // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21. № 7(126). С. 26-38.
5. Елисеев А.В. Диады в механических системах: особенности динамических свойств. Часть II // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21 № 8. С. 22-37.
6. Елисеев С.В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В. Елисеев, А.И. Артюнин. – Новосибирск: Наука, 2016. – 459 с.
7. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи): монография / отв. ред. А.И. Артюнин. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 692 с.

Сведения об авторах:

Елисеев Андрей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры высшей математики, ИрГУПС, г.Иркутск;
Кузнецов Николай Константинович – д.т.н., профессор кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении, ИрНИТУ, г.Иркутск;
Николаев Андрей Владимирович – соискатель, ИрГУПС, г.Иркутск.

CHARACTERISTIC FEATURES OF THE DISTRIBUTION OF AMPLITUDES OF FREE OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS: INSERTION OF ADDITIONAL TIES, STRUCTURAL FORMATIONS

Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V.

Keywords: mechanical, structural, education, distribution of oscillation amplitudes, additional links, nodes, oscillation, dyads.

Abstract. Methodological positions of the description of characteristic features of structural formations, so-called dyads, in mechanical oscillatory systems are developed. The aim of the work is to develop a method for constructing mathematical models to assess the dynamic features of the free oscillations of the dyad in the conditions of providing a special distribution of vibration amplitudes, ensuring the presence of characteristic points. A formalized concept of substantiation of the existence of characteristic points for a system with two degrees of freedom with an additional connection implemented by the motion transformation device is developed. As an example of the distribution of the amplitudes forming the oscillation node, the dependence of the structural and dynamic features of the oscillatory system on the parameter of the motion transformation device is shown. Presented analytical relations characterizing the sensitivity of the position of the node of oscillation on the parameters of the system. The results of computational modeling are presented; the conclusion about possible directions of development of a spectrum of dynamic properties is formed.

References

1. Ganiev R.F. Vibrations of solids. - Moscow: Science, 1976. - 432 p.
2. Tarasik V.P. Mathematical modeling of technical systems- Minsk: Design PRO, 2004. 640 p.
3. Kuznetsov N.K. Dynamics of controlled machines with additional links - Irkutsk, 2009. - 290 p.
4. Eliseev A.V. Dyads in mechanical systems: features of dynamic properties. Part I. Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2017. Vol. 21. № 7 (126). P. 26-38.
5. Eliseev A.V. Dyads in mechanical systems: features of dynamic properties. Part II // Bulletin of Irkutsk State Technical University. 2017. Vol. 21 No. 8. P. 22-37.
6. Eliseev S.V. Applied theory of oscillations in problems of dynamics of linear mechanical systems.- Novosibirsk: Science, 2016. 459 p.
7. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections). – Irkutsk : Irkutsk State Transport University, 2018. - 692 p.