УДК 514.8 https://doi.org/10.26160/2658-6185-2021-4-27-31

ТРАКТРИСА В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

Бойко В.С.
Санкт-Петербургский горный университет, г.Санкт-Петербург

Ключевые слова: трактриса, псевдосфера, антифрикционная пята, механизм Беннета, ударник.
Аннотация. Наряду с различными уникальными кривыми в геометрии особе место занимает трактриса. В тексте статьи приведена обобщенная информация о трактрисе и псевдосфере, перечислены ее свойства и показано несколько примеров из техники, в элементах которых обнаружена трактриса.

TRAKTRIS IN SCIENCE AND TECHNIC

Boyko V.S.
Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

Keywords: traktris, pseudosphere, antifriction heel, Bennett mechanism, anvil-block.
Abstract. Along with various unique curves in geometry, the traktris occupies a special place. The text of the article provides generalized information about the tractris and the pseudosphere, lists its properties and shows several examples from the technique, in the elements of which the tractrixs is found.

Различные механизмы, детали машин, строительные конструкции, оптические приборы, архитектурные объекты состоят их элементов сложной геометрической формы, для образования которых используют уникальные геометрические и механические свойства кривых [1]. Наука о кривых базируется на общих теоретических положениях математики, задачах геометрии, задачах из области механики, физики, естествознания. Некоторые замечательные кривые непосредственно реализуются в физических явлениях, в природе и в обыденной жизни. Знакомство с различными кривыми и их свойствами и особенностями вызывает особый интерес, развивает математическое мышление и обогащает как фундаментальные научные знания, так и практические навыки.

Современный уровень развития науки и техники требует в том числе более углубленных знаний о кривых, с которыми сталкиваются ученые и проектировщики в своей исследовательской и практической работе. Обратимся к одной из уникальных плоской кривой – трактрисе.

Трактриса представляет собой кривую, у которой длина касательной является величиной постоянной [1, 2].

Открытие и исследование трактрисы связано с именами таких учёных, как Готфрид Вильгельм Лейбниц и Христиан Гюйгенс, которые первыми смогли решить задачу, предложенную в 1693 году Клодом Перро, французским инженером и врачом. Задача заключалась в следующем: один конец нерастяжимой нити прикреплён к тяжёлой материальной точке M, лежащей на горизонтальной плоскости, другой её конец движется по прямой $X'X$, лежащей в той же плоскости. Какую линию опишет материальная точка, увлекаемая натянутой нитью?

Оба учёных решили эту задачу одновременно, в частности Г.В. Лейбниц составил дифференциальное уравнение искомой линии, основываясь на том, что отрезок её касательной от материальной точки *M* до пересечения с прямой *X'X* должен иметь постоянную длину, равную длине самой нити. Христиан Гюйгенс впоследствии назвал найденную кривую линию тракторией (от того же латинского слова *trahere* (тянуть, увлекать), от которого образовано слово «трактор») В настоящий момент более распространено название трактриса. К тому же он обобщил задачу Перро, предполагая, что свободный конец нити перемещают не по прямой, а по произвольной кривой, что повлекло за собой наряду с обыкновенной трактрисой (трактрисой прямой линии) возникновение таких понятий, как трактриса параболы, трактриса окружности и т.д.

Уравнение трактрисы в параметрическом виде записывается следующим образом [1] (рис. 1).

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos t + a\cdot\ln tg\frac{t}{2}, \\ y &= a\cdot\sin t, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где *a* – длина касательной, *t* – параметр, представляющий сбой угол, составляемый касательной к трактрисе с положительным направлением оси абсцисс, причем $0 < t < \pi$.

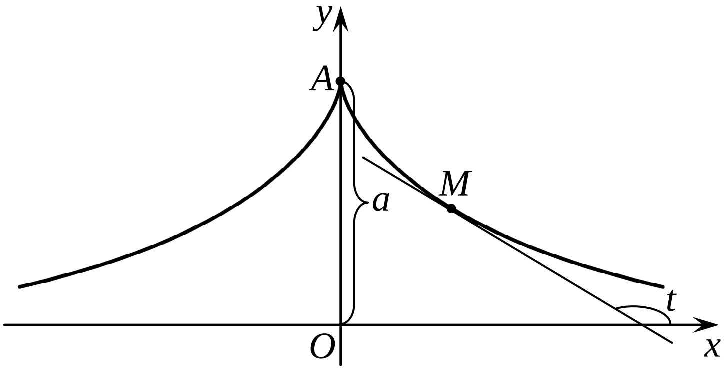

Рис. 1. Трактриса

При исключении параметра *t* из этих уравнений можно получить следующее уравнение трактрисы:

$$x = a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}\,. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что:

– всегда $y > 0$;

– при $t \to 0$ $x \to -\infty$ и $y \to 0$;

– при $t \to \pi$ $x \to \infty$ и $y \to 0$;

– при $t = \pi/2$ $x = 0$ и $y = a$.

Следовательно, трактриса удаляется в бесконечность в обе стороны от вершины, т.е. ось абсцисс является асимптотой трактрисы.

Легко заметить, что при значениях параметра *t* каждой паре *t* и $\pi - t$ соответствуют одинаковые значения *y* при различающихся по знаку значениях *x*. Это означает, что трактриса симметрична относительно оси ординат.

Рассмотрим некоторые свойства трактрисы.

Площадь, ограниченная трактрисой и ее асимптотой, определяется по формуле [1]

$$U = \frac{\pi a^2}{2}, \qquad (3)$$

т.е. она равна половине площади круга, радиус которого равен параметру a трактрисы.

Объем тела, полученного при вращении трактрисы относительно ее асимптоты, находится по формуле [1]

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3, \qquad (4)$$

т.е. объем равен половине объема шара радиусом, равным параметру a трактрисы.

Длина участка трактрисы, отсчитываемого от вершины A (рис. 1) до точки, соответствующей произвольному значению переменной t, вычисляется по формуле [1]

$$S = -a \ln \sin t. \qquad (5)$$

Поверхность тела, образованного вращением трактрисы вокруг асимптоты, находится по формуле [1]

$$P = 4\pi a^2, \qquad (6)$$

т.е. эта поверхность равна поверхности шара с радиусом, равным параметру a трактрисы.

Радиус кривизны трактрисы в произвольной точке определяется из уравнения [1]

$$R = a \operatorname{ctg} t. \qquad (7)$$

Эволютой трактрисы является цепная линия – катена, и соответственно трактриса представляет собой эвольвенту цепной линии.

В истории математики [2] трактрисе было суждено сыграть выдающуюся роль в связи с открытием Н.И. Лобачевским его геометрии. Было доказано, что геометрия Лобачевского реализуется на поверхностях отрицательной кривизны. Таким свойством обладает поверхность, названная Э. Бельтрами *псевдосферой* (рис. 2), получаемая при вращении вокруг оси абсцисс трактрисы.

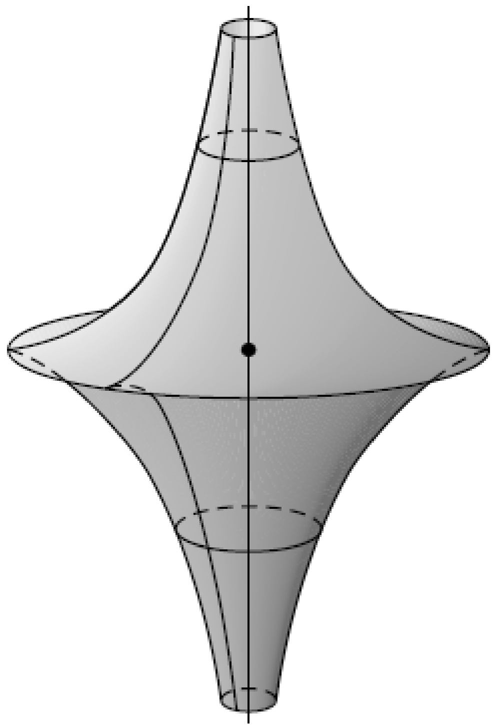

Рис. 2. Псевдосфера

Трактриса и псевдосфера, благодаря своей уникальности, получили широко применение в технике. Приведем несколько примеров.

Одной из частей в механизме карусельного токарного станка является так называемая антифрикционная пята (рис. 3) [1]. Кривая, по которой очерчен профиль вертикального сечения этой пяты, должна удовлетворять условию

$$\frac{x}{\cos\varphi} = r = const. \qquad (8)$$

Это условие выражает техническое требование, согласно которому снашивание пяты во время работы станка должно быть равномерным. Ясно, что левая часть этого равенства определяет длину касательной. Таким образом, кривая вертикального профиля антифрикционной пяты обладает тем свойством, что длина её касательной постоянна и, следовательно, является трактрисой.

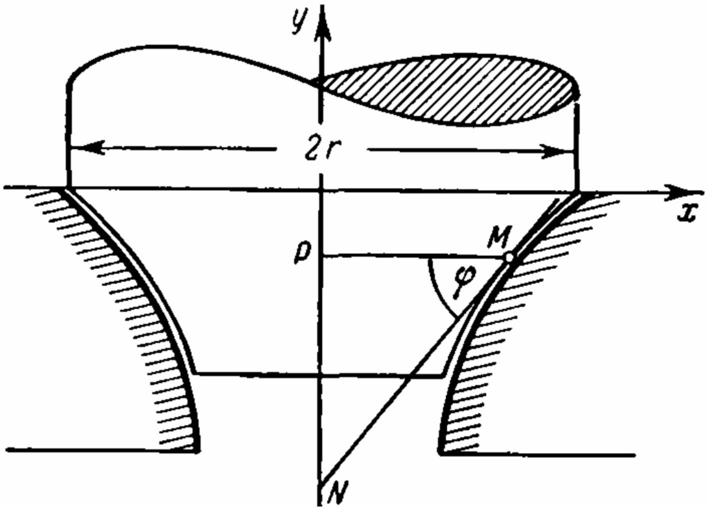

Рис. 3. Антифрикционная пята

В 2009 году на страницах журнала «Теория механизмов и машин» [3] профессор Л.Т. Дворников обосновывает существование механизма Беннета (рис. 4) на псевдосфере. Механизм Беннета – это пространственный шарнирный четырехзвенник, в котором оси вращательных кинематических пар не параллельны и не пересекаются между собой, противоположные звенья одинаковы по длине и при этом соблюдается пропорция

$$\frac{AB(DC)}{\sin\alpha} = \pm\frac{BC(AD)}{\sin\beta}. \qquad (9)$$

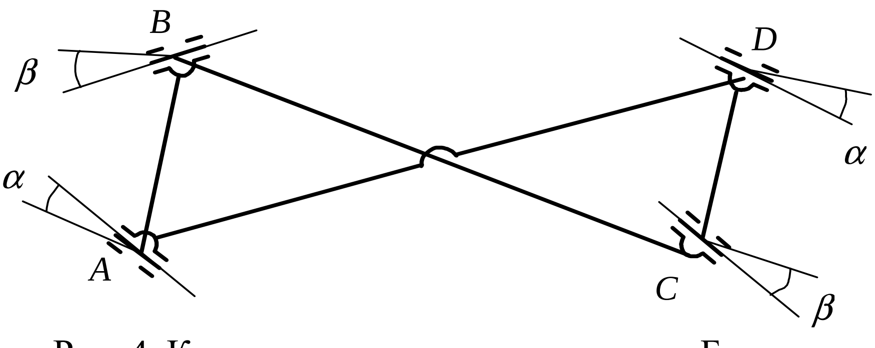

Рис. 4. Кинематическая цепь механизма Беннета

Этот механизм представлялся невозможным, а потому продолжает вызывать интерес ученых по сей день. Главной проблемой, требующей исчерпывающего доказательства, было обоснование того, почему изучаемый пространственный четырехзвенник подвижен.

Рассматривая механизм Беннета с точки зрения теории структуры механических систем, Л.Т. Дворников приходит к выводу [3], что существование механизма Беннета необходимо искать в пространстве, на которое наложено три общих условия связи. Удовлетворяющие этим условиям механизмы могут существовать в плоскости и на сфере. Однако механизм Беннета не есть механизм плоский или сферический, а потому факт его работоспособности явился основанием к поиску некоей третьей поверхности, которая бы удовлетворяла требованиям плоскости и сферы. Этой поверхностью оказалась псевдосфера.

Трактриса и псевдосфера находят также свое применение в ударных устройствах. Так, в 2013 году был запатентован ударник (рис. 5), состоящий из жестко соединенных между собой цилиндра и коаксиально расположенного в нем штока, боковая поверхность которого является поверхностью постоянной отрицательной кривизны, образуемой вращением трактрисы около её асимптоты.

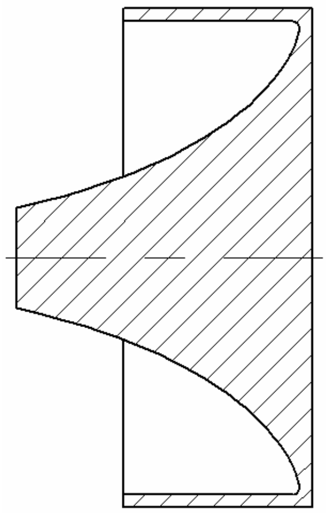

Рис. 5. Боёк цилиндро-псевдосферический

Уникальная особенность такого бойка заключается в том, что он генерирует ударный импульс с непрерывно возрастающей по линейному закону амплитудой, обеспечивая тем самым повышение эффективности передачи энергии обрабатываемой среде.

Вот несколько практических примеров реализации замечательной кривой – трактрисы – в технике. Можно предположить, что благодаря ее особенным свойствам, мы продолжим встречу с трактрисой в самых неожиданных изобретениях человечества.

Работа выполнена под руководством профессора кафедры машиностроения, д.т.н. Жукова Ивана Алексеевича.

Список литературы

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 293с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991с.
3. Дворников Л.Т. Нетрадиционные рассуждения о существовании механизма Беннета // Теория механизмов и машин. – 2009. – Т.7, №1. – С. 5-10.
4. Патент №2486049 РФ, МПК B25D 17/02. Боёк цилиндро-псевдосферический / Дворников Л.Т., Жуков И.А. (РФ) – №2012101093; приоритет от 11.01.2012; опубл. 27.06.2013, Бюл. №18.

Сведения об авторе:

Бойко Вероника Сергеевна – студент, Горный университет, Санкт-Петербург.