

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

Федюков А.А.

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец

Ключевые слова: сетеподобный носитель, начально-краевая задача, краевое условие, метод конечных разностей, разностные схемы, суммируемые функции, сходимости и устойчивость, волновая системы, слабые решения.

Аннотация. В работе рассматривается начально-краевая задача, описывающая волновой процесс на сетевом носителе, представленном ограниченным геометрическим графом. Вводятся обозначения для узлов, рёбер и функциональных пространств, определяющих состояния волновой системы. На основе исходной дифференциальной модели строится разностная схема и соответствующая алгебраическая система уравнений на сетке, формируемой разбиением рёбер графа. Предлагается алгоритм вычисления приближённых решений, включающий построение сетки, применение разностных операторов и формирование сеточных функций для исходных данных. Показано, что полученные сеточные значения являются приближёнными решениями задачи, а точность возрастает при уменьшении шага разбиения. Результаты могут применяться при моделировании гидродинамических и химико-технологических процессов, а также при решении задач с более сложными краевыми условиями.

ALGORITHM FOR DETERMINING THE SOLUTION OF A WAVE SYSTEM IN THE CLASS OF SUMMABLE FUNCTIONS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON A GRAPH

Fedyukov A.A.

Bunin Yelets State University, Yelets

Keywords: network like medium, initial boundary value problem, boundary condition, finite difference method, difference scheme, summable functions, convergence and stability, wave system, weak solutions.

Abstract. The paper considers an initial-boundary value problem describing a wave process on a network carrier represented by a bounded geometric graph. Notation for the nodes, edges, and functional spaces defining the states of the wave system is introduced. Based on the original differential model, a finite-difference scheme and the corresponding algebraic system of equations on a grid formed by partitioning the graph edges are constructed. An algorithm for computing approximate solutions is proposed, including grid construction, application of difference operators, and formation of grid functions for the initial data. It is shown that the obtained grid values represent approximate solutions of the problem, and the accuracy increases as the partition step decreases. The results can be applied to modeling hydrodynamic and chemical-technological processes, as well as to solving problems with more complex boundary conditions.

Алгоритм состоит в сведении начально-краевой задачи к системе алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются значения сеточных функций и последующему изучению предельного перехода, когда длины сторон ячеек сетки стремятся к нулю. Используем обозначения, приведенные в работах [1-3]. Носителем функций рассматриваемой начально-краевой задачи является произвольный ограниченный геометрический граф Γ . Обозначим множество узлов

ξ этого графа как V , а символами $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных и внутренних узлов $V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$ соответственно. Предположим, что все ребра γ графа имеют единичную длину, и через Γ_0 обозначим объединение этих ребер графа, не содержащих концевых точек: $\Gamma_0 = \Gamma \setminus V$.

Введем обозначения $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ и для каждой функции $f(x, t)$, определенной на графе Γ , будем обозначать $f(x, t)_\gamma$.

Для дальнейшего построения пространств будем использовать свойства пространства $W_2^1(\Gamma_T)$, где на сечении области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) определен след функции $y(x, t)$ как элемент пространства $L_2(\Gamma)$, непрерывный по t в метрике $L_2(\Gamma)$. Пространства $W_2^1(\Gamma_T)$ и $W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ определяют пространства состояний волновой системы.

В пространстве $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ относительно функции $y(x, t)$ задана начально-краевая задача в области $\bar{\Gamma}_T$, являющаяся математической моделью волнового процесса в сетевом носителе, моделируемом (интерпретируемом) геометрическим графом Γ :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x) y(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Gamma, y|_{\partial\Gamma} = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Соотношения (2) представляют начальное и краевое условия соответственно, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, функции $a(x)$ и $b(x)$ ограничены и удовлетворяют условиям $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \tilde{b}$, $x \in \Gamma$.

Получим разностную схему, которая соответствует начально-краевой задаче (1)-(2). Затем строим алгебраическую систему относительно $u_h = u_h(k)$ вида

$$u_{t\bar{t}} - (a_h u_x)_{\bar{x}} + b_h u_h = f_h. \quad (3)$$

на сетке Γ^h для каждого слоя $t = t_k$ ($k = \bar{1}, \bar{N}$). К нему (уравнению (3)) присоединим разностные соотношения, аппроксимирующие условия согласования (2) во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ графа Γ , а также соотношения $u_h(0) = \phi_h$, $u_h(1) = \phi_h + \tau\psi_h$, где ϕ_h – сеточная функция в точках kh ячеек ω_{kh} , аппроксимирующие начальные условия на плоскостях $t = k\tau$ ($k = 0, 1$), и соотношения $u_h(k)|_{\partial\Gamma} = 0$, $k = 0, 1, \dots, N$, аппроксимирующие краевые условия (3) на $\partial\Gamma$.

Алгоритм определения приближений дифференциальной системы (1)-(2):

Шаг 1. Формируется сетка Γ^h графа Γ , для чего производится разбиение ребер γ графа Γ точками kh (k – натуральные числа, $h > 0$ – фиксированное число, равное длине элементарного отрезка ω_h) при этом внутренние узлы $\xi \in J(\Gamma)$ графа входят в число таких точек.

Шаг 2. Применяем разностные операции для сеточных функций u_h :

$$u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x)), u_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h)).$$

Шаг 3. Для исходных (заданных) функций $\varphi(x) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ формируются сеточные функция φ_h в точках kh ячеек ω_{kh} с помощью усреднений $\varphi_h = \frac{1}{h} \int_{\omega_{kh}} \varphi(x) dx$, $f_h|_{x=kh, t=k_0\tau} = \frac{1}{h\tau} \int_{\Gamma_T(k, k_0)} f(x, t) dx dt$, аналогично строятся сеточные функции ψ_h , a_h и b_h для исходных (заданных) функций: $\psi(x)$, $a(x)$ и $b(x)$.

Шаг 4. Приближенные решения $u_h(k)$ определим как сеточные функции, удовлетворяющие разностным соотношениям:

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} (a_h u_x(k))_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} (a_h u_{\tilde{x}}(k))_\gamma, u_h(0) = \phi_h, u_h(1) = \phi_h + \tau \psi_h, \\ u_h(k)|_{\partial\Gamma} = 0, k = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, приближенным решением $u(x, t)$ задачи (1)-(2) являются значения сеточных функций $u_h(k)$. Наблюдается, что точность возрастает при уменьшении шага разбиения $h > 0$ ребер графа.

Полученные результаты применимы для решения различных смежных задач: в гидродинамических процессах в городских системах водоснабжения, а также в управлении химическими процессами в реакторах. Следует отметить, что полученные выводы относительно устойчивости решений дифференциально-разностных систем в значительной степени согласуются с рассматриваемыми результатами. Также данный подход можно применить для определения решений начально-краевых задач при более сложных краевых условиях 2-го и 3-го рода без каких-либо существенных изменений.

Список литературы

1. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки» // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – №1-2(31). – С. 272-277.
2. Перова И.В., Парт А.А., Тран З., Федюков А.А., Абреимов П.П. Разностные схемы для уравнения переноса сплошной среды и волнового уравнения с носителями на сети // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – №1(99). – С. 16-21.
3. Федюков А.А. Устойчивость и сходимость разностной схемы для волновой системы в классе суммируемых функций с сетеподобным носителем. // Системы управления и информационные технологии. – 2025. – №2-1 (100). – С. 69-74.

Сведения об авторе:

Федюков Артём Александрович – аспирант.