

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА» НА ПРИМЕРЕ ТРОФИЧЕСКОЙ ЦЕПИ «РЫБЫ – ПЛАНКТОН»

Лященко Б.С.¹, Лященко Т.В.², Никитина А.В.³

¹*Мытищинский филиал Московского государственного технического
университета имени Н.Э. Баумана, Мытищи;*

²*Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
Южного федерального университета, Таганрог;*

³*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Ключевые слова: математическая биология, модель хищник-жертва, планктон, рыбы, численные методы, визуализация, Runge-Kutta, устойчивость.

Аннотация. В работе рассматривается модифицированная система «хищник-жертва», предназначенная для описания взаимодействия планктона и рыб в замкнутой трофической цепи. В отличие от классической схемы Лотки-Вольтерры в модель включены логистический рост жертвы, насыщение потребления по Холлингу II и квадратичный член саморегуляции хищника. Проведен сравнительный анализ численных методов Эйлера, RK4 и адаптивного метода RK45. Показано, что при увеличении емкости среды возрастают амплитуды колебаний, а для визуализации решений наиболее надежными оказываются методы высокого порядка с адаптивным выбором шага.

NUMERICAL METHODS SOLUTIONS ANALYZING AND VISUALIZING MODIFIED PREDATOR – PREY SYSTEM USING THE FISH – PLANKTON TROPHIC CHAIN AS AN EXAMPLE

Lyashchenko B.S.¹, Lyashchenko T.V.², Nikitina A.V.³

¹*Mytishchi Branch of Bauman Moscow State Technical University, Mytishchi;*

²*Institute of Computer Technologies and Information Security of the Southern Federal
University, Taganrog;*

³*Don State Technical University, Rostov-on-Don*

Keywords: mathematical biology, predator-prey model, plankton, fish, numerical methods, visualization, Runge-Kutta, resilience.

Abstract. The work considers a modified predator-prey system designed to describe the plankton and fish interaction in a closed trophic chain. Unlike the classic Lotka-Volterra scheme, the model includes the logistic victim growth, the consumption saturation according to Holling II and the predator's self-regulation quadratic member. A numerical Euler methods comparative analysis, RK4 and adaptive RK45 methods was carried out. It has been shown that as the medium increases capacity, vibration amplitudes increase, and high-order methods with adaptive step selection turn out to be the most reliable for visualizing solutions.

Классические модели типа Лотки-Вольтерры качественно описывают колебательные режимы в системе «хищник-жертва», однако для прикладных задач водной экологии их базовая структура оказывается недостаточной. В системе «рыбы-планктон» необходимо учитывать ограниченность кормовой базы планктона, насыщение потребления и внутривидовую конкуренцию рыб. Поэтому в современных работах по математической экологии широко используются

модификации Розенцвейга-МакАртура с функциональным откликом Холлинга II [1, 2]. Для планктонно-рыбных систем такие подходы развиваются и в недавних публикациях [3-5].

Введем переменные: $x(t)$ – относительная численность планктона, $y(t)$ – относительная численность рыб. Тогда модифицированная система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1+ahx}, \\ \frac{dy}{dt} &= \eta \frac{axy}{1+ahx} - my - qy^2,\end{aligned}$$

где r – коэффициент роста планктона, K – емкость среды, a – интенсивность потребления, h – время обработки пищи, η – коэффициент усвоения, m – естественная смертность рыб, q – коэффициент саморегуляции хищника. Включение логистического множителя устраняет неограниченный рост жертвы, а дробно-рациональный трофический член отражает эффект насыщения при больших значениях x . Квадратичный член qy^2 описывает конкуренцию рыб за ресурс и делает систему устойчивее с биологической точки зрения.

Равновесное состояние определяется из условий $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$. Для второй формулы при $y > 0$ получаем соотношение

$$\eta \frac{ax}{1+ahx} = m + qy,$$

которое показывает, что рост емкости среды K смещает стационарную точку и при прочих равных может усиливать колебательный режим. Такой результат согласуется с известным «парадоксом обогащения», обсуждаемым для моделей Розенцвейга-МакАртура [1].

Для численного интегрирования исследованы три схемы. Явный метод Эйлера использовался как базовая аппроксимация первого порядка. Классическая схема Рунге-Кутты четвертого порядка применялась для расчетов на фиксированной сетке. В качестве основного инструмента визуализации использован адаптивный метод RK45, автоматически уменьшающий шаг на участках быстрого изменения траектории. Такое сравнение важно, поскольку неудачный выбор шага в биологических моделях может приводить к ложному затуханию колебаний либо к искусственному разрастанию амплитуды.

В расчетах приняты значения $r = 1$, $K = 1,6$, $a = 2,4$, $h = 0,6$, $\eta = 0,55$, $m = 0,28$, $q = 0,12$, начальное состояние $(x_0, y_0) = (0,8; 0,25)$. В качестве опорного решения использован RK45 с ужесточенными допусками. Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1 показывает, что метод Эйлера пригоден лишь для предварительной оценки. Уже при умеренном шаге он заметно смещает фазовую траекторию. Схема RK4 дает существенно меньшую ошибку, однако требует ручного выбора шага. Адаптивный метод RK45 сочетает высокую точность и вычислительную устойчивость, поэтому именно он выбран для построения временных рядов и фазового портрета.

На рисунке 1 представлены временные зависимости $x(t)$ и $y(t)$, а также фазовая траектория. Видно, что максимум численности рыб запаздывает

относительно максимума планктона, что соответствует биологическому механизму передачи ресурса по трофической цепи. В фазовой плоскости траектория закручивается к устойчивому предельному циклу.

Табл. 1. Сравнение численных методов

Метод	$\max \Delta x $	$\max \Delta y $	Вывод
Эйлер, $h = 0,05$	$2.35e-02$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	Искажает амплитуду
$RK4$, $h = 0,10$	$1.14e-04$	$6,07 \cdot 10^{-5}$	Высокая точность
$RK45$, адаптивный шаг	$2.11e-08$	$1,29 \cdot 10^{-8}$	Оптimalен для визуализации

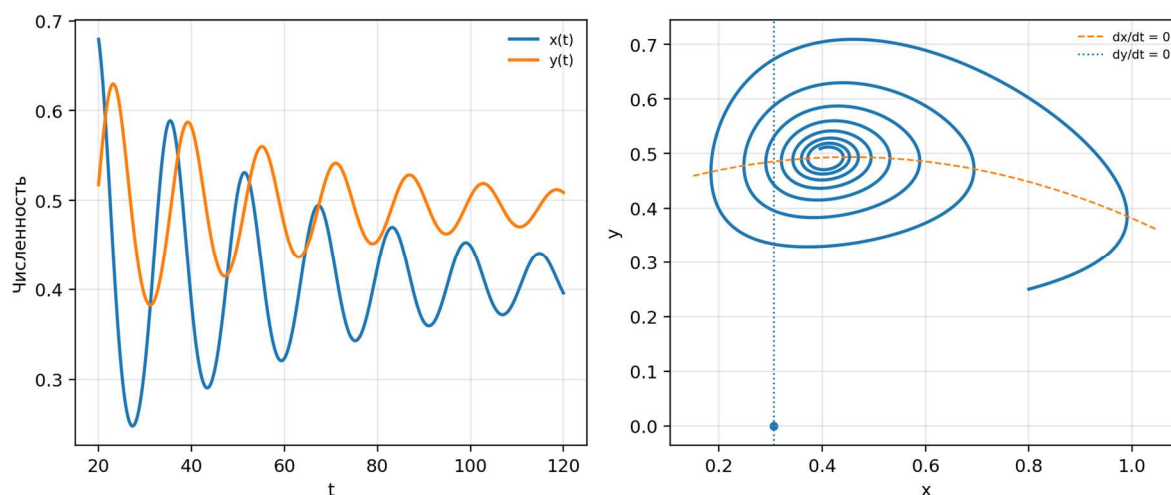


Рис. 1. Временные зависимости и фазовый портрет системы

Дополнительные расчеты показали, что при $K \leq 1,2$ система практически выходит на стационарное состояние, а при увеличении K до 1,6 и выше формируются выраженные автоколебания. Следовательно, параметр емкости среды может рассматриваться как управляющий фактор перехода от равновесного режима к циклическому.

Таким образом, модифицированная модель «рыбы-планктон» адекватно воспроизводит ограниченность роста жертвы и запаздывающую реакцию хищника. Численный анализ показал, что для качественной интерпретации решений недостаточно использовать только простейшие разностные схемы. Наиболее надежный результат дают методы высокого порядка и адаптивного интегрирования, позволяющие корректно визуализировать временные ряды и фазовые портреты. Перспективным направлением дальнейшей работы является построение бифуркационных диаграмм по параметрам K , a и q , а также идентификация коэффициентов модели по реальным гидробиологическим данным.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-20001, <https://rscf.ru/project/25-71-20001/>

Список литературы

1. Rosenzweig M.L., MacArthur R.H. Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions // The American Naturalist. 1963, vol. 97, no. 895, pp. 209-223. DOI: 10.1086/282272.

2. Holling C. S. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism // The Canadian Entomologist. 1959, vol. 91, no. 7, pp. 385-398. DOI: 10.4039/Ent91385-7.
3. Skvortsova M.A. Asymptotic Properties of Solutions to Delay Differential Equations Describing Plankton-Fish Interaction // Mathematics. 2021, vol. 9, no. 23, p. 3064. DOI: 10.3390/math9233064.
4. Кузнецова И.Ю., Никитина А.В. Изучение биопродуктивности искусственного водоема на основе графовой модели взаимодействия природных и антропогенных факторов // Безопасность техногенных и природных систем. – 2025. – Т. 9, №4. – С. 305-318. – DOI: 10.23947/2541.
5. Жданова О.Л., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Динамика планктонного сообщества с учетом трофических характеристик зоопланктона // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, №2. – С. 525-554. – DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-2-525-554.

Сведения об авторах:

Лященко Борис Сергеевич – студент;

Лященко Татьяна Владимировна – старший преподаватель;

Никитина Алла Валерьевна – д.т.н., профессор.