

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНОЙ УКЛАДКОЙ ВОЛОКОН

Каюмов Р.А., Шакирова А.М., Мухамедова И.З.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

Ключевые слова: предельная нагрузка, нелинейно-упругие соотношения, конечно-элементная модель, деформации, метод секущих жесткостей, метод последовательных догрузений.

Аннотация. Рассмотрена задача об определении предельной нагрузки при растяжении композитных стержней с различной укладкой волокон. Для этого композита построены определяющие соотношения на основе нелинейно-упругой модели поведения материала с диаграммой, имеющей экстремум. Были рассмотрены два численных подхода для решения нелинейно-упругой задачи: метод секущих жесткостей (метод Биргера) и метод последовательных догрузений (метод Петрова). При этом использовался метод конечных элементов для плоского-напряженного состояния.

ON SOLVING THE PROBLEM OF DESTRUCTION OF COMPOSITE RODS WITH DIFFERENT FIBER ARRANGEMENTS

Kayumov R.A., Shakirova A.M., Mukhamedova I.Z.

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan

Keywords: maximum load, nonlinear elastic relations, finite element model, deformations, the method of secant stiffness, the sequential upload method.

Abstract. The problem of determining the ultimate tensile load of composite rods with different fiber arrangements is considered. For this composite defining relations are built on the basis of nonlinear-elastic model of material behaviour with diagram having extremum. Two numerical approaches for solving the nonlinear elastic problem were considered: the method of cutting stiffnesses (Birger method) and the method of sequential loading (Petrov method). The finite element method for the plane-stress state was used.

Для определения предельной нагрузки при растяжении композитных стержней с различной укладкой волокон предлагается использовать нелинейно-упругую модель поведения материала, но с диаграммой, имеющей экстремум, как это приведено на рисунке 1. Задача решалась двумя методами: методом секущих жесткостей (метод Биргера) и методом последовательных догрузений. В отличие от метода Ньютона-Рафсона (метод касательных жесткостей) они позволяют легко проходить экстремум диаграммы, если использовать кинематическое нагружение. При этом для рассматриваемого номера m итерационного процесса значения упругих характеристик определяются по значениям деформаций предыдущего шага. Решив задачу для ряда увеличивающихся значений перемещений можно получить диаграмму «нагрузка – перемещение» и найти предельное значение нагрузки P^* (см. рис. 1).

Решение в этом случае проводилось и аналитически, и методом конечных элементов МКЭ по авторской программе для случая плоского напряженного состояния [2, 3]. Использовались треугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений.

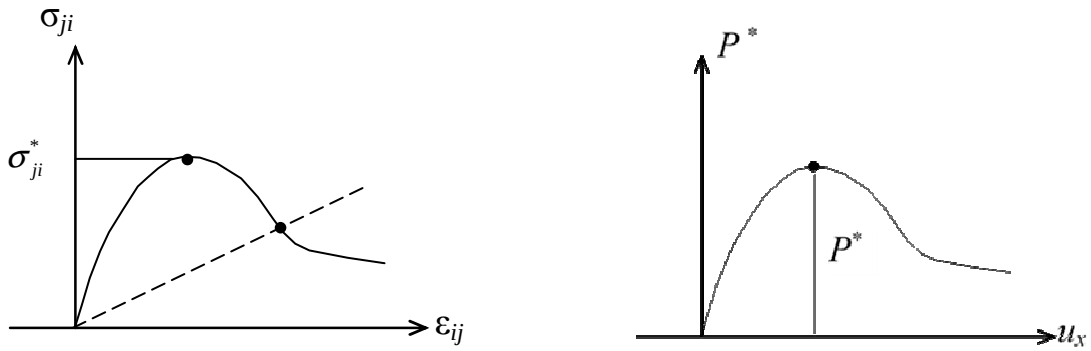


Рис. 1. Нелинейно-упругая модель поведения материала

Запишем соотношения МКЭ [4]. В нашем случае мы используем кинематическое нагружение, т.е. задаем перемещения u_x . На первом шаге матрица упругих характеристик $[D]$ постоянна. На последующих шагах матрица $[D]$ определяется по формулам, в которых используются деформации, найденные на предыдущем шаге с номером k :

$$[K]^{(k+1)}\{U\}^{(k+1)} = 0, [K] = \int_A [B]^T [D]^{(k+1)} [B] dA, [D]^{(k+1)} = [D(\epsilon_{ij}^{(k)})], \quad (1)$$

где $[K]^{(k+1)}$ – матрица жесткости, $\{U\}^{(k+1)}$ – вектор перемещений, $[B]$ – матрица, связывающая перемещения и деформации, $\epsilon_{ij}^{(k)}$ – деформации, A – площадь сечения. Далее u_x увеличивается, заново решается система (1) и находится нагрузка P . Далее процесс повторяется, находится диаграмма, изображенная на рисунке 1, из которой определяется максимальная нагрузка P^* .

Нелинейно-упругие соотношения были приняты в виде, аналогичном линейно-упругой задаче:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1^{нел}(\epsilon_{11})} - \frac{\sigma_{22}}{E_1^{нел}(\epsilon_{11})} \nu_{12}^{нел}(\epsilon_{11}), \quad \epsilon_{22} = -\frac{\sigma_{11}}{E_1^{нел}(\epsilon_{11})} \nu_{12}^{нел}(\epsilon_{11}) + \frac{\sigma_{22}}{E_2^{нел}(\epsilon_{22})}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G^{нел}(\gamma_{12})}, \quad \nu_{12}^{нел}(\epsilon_{11}) = \frac{E_1^{нел}(\epsilon_{11})}{E_1} \nu_{12}, \quad \nu_{21}^{нел}(\epsilon_{22}) = \frac{E_2^{нел}(\epsilon_{22})}{E_1} \nu_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_{ii} , τ_{ij} – напряжения, ϵ_{ii} , γ_{12} – деформации, E_i – модули упругости, ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, $G^{нел}$ – модуль сдвига.

Решение системы (2) дает для нормальных напряжений соотношения в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left[E_1^{нел}(\epsilon_{11}) \cdot \epsilon_{11} + \nu_{12}^{нел}(\epsilon_{11}) \cdot E_2^{нел}(\epsilon_{22}) \cdot \epsilon_{22} \right] \frac{1}{1 - \nu_{12}^2 \cdot E_1^{нел}(\epsilon_{11}) \cdot E_2^{нел}(\epsilon_{22}) / E_1^2}, \\ \sigma_{22} &= \left[\nu_{12}^{нел}(\epsilon_{11}) \cdot E_2^{нел}(\epsilon_{22}) \cdot \epsilon_{11} + E_2^{нел}(\epsilon_{22}) \cdot \epsilon_{22} \right] \frac{1}{1 - \nu_{12}^2 \cdot E_1^{нел}(\epsilon_{11}) \cdot E_2^{нел}(\epsilon_{22}) / E_1^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку согласно диаграмме, приведенной на рисунке 1, секущие модули $E_1^{нел}(\epsilon_{11})$ и $E_2^{нел}(\epsilon_{22})$ могут только уменьшаться, то знаменатели в (3) будут всегда положительны. Обеспечивается и симметричность матрицы упругих характеристик.

При численных расчетах для модулей упругости и модуля сдвига нелинейные соотношения были приняты в следующем виде:

$$E_1^{нел} = \frac{B_{11}}{1 + |\epsilon_{11}|^{m_{11}} C_{11}}, \quad C_{11} = \left(\frac{E_1}{2\sigma_{11}^*} \right)^{m_{11}}, \quad E_2^{нел} = \frac{B_{22}}{1 + |\epsilon_{22}|^{m_{22}} C_{22}}, \quad C_{22} = \left(\frac{E_2}{2\sigma_{22}^*} \right)^{m_{22}},$$

$$G_{12}^{нел} = \frac{B_{12}}{1 + |\gamma_{12}|^{m_{12}} C_{12}}, \quad C_{12} = \left(\frac{G_{12}}{2\tau_{12}^*} \right)^{m_{12}}. \quad (4)$$

Здесь m_{11} , m_{22} , m_{12} – задаваемые числа, C_{11} , C_{22} , C_{12} – функции, зависящие от m_{11} , m_{22} , m_{12} и от предельных напряжений σ_{11}^* , σ_{22}^* , τ_{12}^* (пределов прочности при растяжении вдоль и поперек армирования и при сдвиге), $m_{ii} > 1$, $m_{12} > 1$. Если имеет место сжатие, то σ_{11}^* , σ_{22}^* – пределы прочности при сжатии. Функции $E_j^{нел}$, $G_{12}^{нел}$ связаны с прочностными характеристиками. Поскольку из (4) должны вытекать значения для пределов прочности, то можно получить выражения для C_{11} , C_{22} , C_{12} и B_{11} , B_{22} , B_{12} в виде:

$$B_{11} = \frac{1}{2} E_1 \cdot m_{11} \cdot (m_{11} - 1) \left(\frac{1}{m_{11}} - 1 \right), \quad B_{22} = \frac{1}{2} E_2 \cdot m_{22} \cdot (m_{22} - 1) \left(\frac{1}{m_{22}} - 1 \right), \quad (5)$$

$$B_{12} = \frac{1}{2} G_{12} \cdot m_{12} \cdot (m_{12} - 1) \left(\frac{1}{m_{12}} - 1 \right), \quad C_{11} = \left(\frac{E_1}{2\sigma_{11}^*} \right)^{m_{11}}, \quad C_{22} = \left(\frac{E_2}{2\sigma_{22}^*} \right)^{m_{22}}, \quad C_{12} = \left(\frac{G_{12}}{2\tau_{12}^*} \right)^{m_{12}},$$

где E_1 , E_2 – модули Юнга вдоль и поперек армирования, G_{12} – модуль сдвига.

При наличии разнопрочности можно ввести аппроксимацию функции Хевисайда, с помощью которой выразить σ_{11}^* , σ_{22}^* , τ_{12}^* через пределы прочности на растяжение σ_{11}^+ , σ_{22}^+ и сжатие σ_{11}^- , σ_{22}^- :

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{11}^- + (\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-) Heviside(\sigma_{11}), \quad Heviside(\sigma_{11}) \approx 2^{-2^{-\lambda \cdot \sigma_{11}}},$$

$$\sigma_{22}^* = \sigma_{22}^- + (\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-) Heviside(\sigma_{22}), \quad Heviside(\sigma_{22}) \approx 2^{-2^{-\lambda \cdot \sigma_{22}}}. \quad (6)$$

Здесь параметры $\lambda \cdot (\sigma_{ii}^+) \gg 1$, $\lambda \cdot (\sigma_{ii}^-) \gg 1$. Их надо выбирать так, чтобы получать функцию, которая близка к кусочно-постоянной. Например, можно принять $\lambda = 1000 / \sigma_{11}^+$.

Матрица упругих характеристик для композитного образца с разной укладкой волокон имеет вид [1]:

$$[D] = [T_1] [D_{12}^{нел}] [T_1]^T,$$

где $[T_1]$ – матрица перехода к декартовой системе координат, $[D_{12}^{нел}]$ – матрица упругих характеристик в осях ортотропии.

На рисунке 2 приведены зависимости предельной нагрузки от угла укладки волокон образца θ предложенными выше методами.

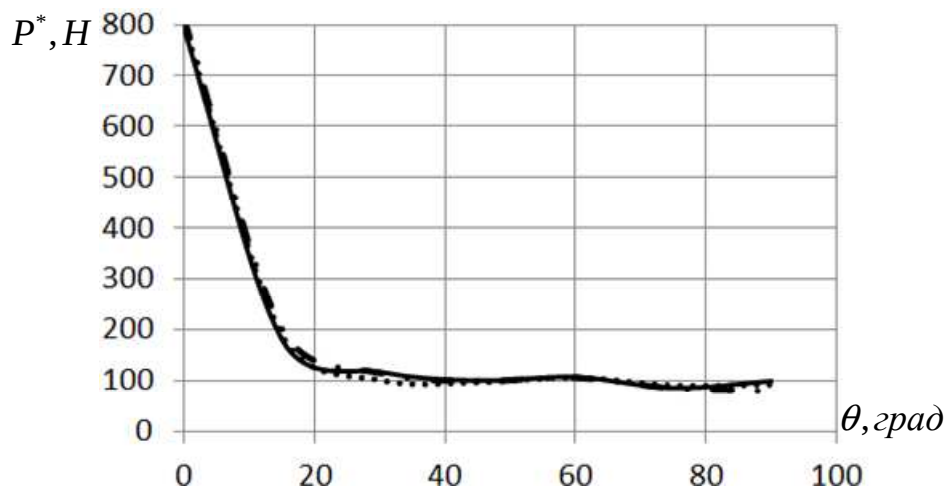


Рис. 2. Штрих-пунктирная линия – аналитическое решение, пунктирная – МКЭ при использовании метода секущих жесткостей, сплошная – МКЭ при использовании метода последовательных догрузений

Анализ результатов показал, что рассмотренные численные методики хорошо согласуются с аналитическим решением. Необходимо отметить лишь, что при решении задачи аналитически и численно методом последовательных догрузений для сходимости требуется несколько сотен шагов по нагрузке. А в методе секущих жесткостей достаточно не более десятка итераций при заданном перемещении торца, число же шагов – порядка пяти.

Список литературы

1. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: Справочник. – М.:Машиностроение, 1990. – 512 с.
2. Каюмов Р.А., Хайруллин Л.Р., Гилязитдинов Р.Ф. Об одном варианте энергетического метода решения задачи устойчивости балок // Известия КГАСУ. – 2024. – № 2(68). – С. 105-113.
3. Валиев А.И., Шакирзянов Ф.Р., Сулейманов А.М., Низамов Р.К. Оценка напряженно-деформированного состояния гибридных полимерных композитов, изготовленных методом вакуумной инфузии // Известия КГАСУ. – 2023. – № 4(66). – С. 241-254.
4. Шакирзянов Ф.Р., Валиев А.И., Сулейманов А.М., Низамов Р.К. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния гибридных композитов // Известия КГАСУ. – 2023. – № 4(66). – С. 275-285.
5. Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гимранов Л.Р., Гимазетдинов А.Р. Определение характеристик вязкоупругой модели стеклопластика по результатам изгиба труб квадратного сечения // Известия КГАСУ. – 2022. – № 2(60). – С. 37-44.

Сведения об авторах:

Каюмов Рашид Абдулхакович – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Механика»;

Шакирова Алсу Минсалиховна – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Механика»;

Мухамедова Инзилия Заудатовна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры «Механика».