

ОПТИМАЛЬНОЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ РОТОРОМ В АКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ

Исаева Д.И., Баландин Д.В.

Научно-технологический университет «Сириус», Сириус

Ключевые слова: оптимальное управление, обобщенная H_2 -норма, активный магнитный подшипник, ПД-регулятор, линейные матричные неравенства, двухкритериальное управление.

Аннотация. Рассматривается задача стабилизации вертикального ротора в электромагнитных подшипниках как задача двухкритериальной оптимизации с функционалами, представляющими собой обобщенные H_2 -нормы, характеризующие максимальные отклонения ротора от равновесного положения и максимальные значения управлений по отношению к неизвестным возмущениям. Приводятся результаты численного решения системы, замкнутой децентрализованным регулятором.

OPTIMAL DECENTRALIZED CONTROL OF ROTOR SYSTEM IN ACTIVE MAGNETIC BEARINGS

Isaeva D.I., Balandin D.V.

Sirius university of science and technology, Sirius

Keywords: optimal control, generalized H_2 -norm, active magnetic bearing, PD controller, linear matrix inequalities, bi-criteria control.

Abstract. The problem of stabilizing a vertical rotor in electromagnetic bearings is considered as a bi-criteria optimization problem with functionals represented by generalized H_2 -norms. These norms characterize the maximum deviations of the rotor from the equilibrium position and the maximum control values in response to unknown disturbances. The results of the numerical solution for the system closed by a decentralized controller are presented.

Введение. Активные магнитные подшипники (АМП) (рис. 1) – это бесконтактные опорные системы, использующие электромагнитные силы для удержания и стабилизации ротора в заданном положении. Конструированию и управлению АМП посвящены работы [1, 2]. В [1] отмечается потребность в подшипниках, способных надежно работать в экстремальных условиях. Например, АМП могут применяться для поддержания и управления ротором турбомашин, обеспечивающих циркуляцию газообразного теплоносителя (гелия или углекислого газа) в газоохлаждаемых ядерных реакторах. Благодаря бесконтактной природе работы, АМП повысят надёжность работы реактора, исключая проблемы, связанные с энергетическими затратами на трение, механическим износом и загрязнением турбины смазкой.

В данной статье рассматривается задача стабилизации вертикального ротора в электромагнитных подшипниках как задача двухкритериальной оптимизации. Один из двух критериев – максимальные отклонения ротора – обеспечивает достижение цели управления, второй – максимальные значения управления – обеспечивает



Рис. 1. Внешний вид АМП

возможности практической реализации. Приводятся результаты численного моделирования системы с оптимальным управлением.

Математическая модель. Механическая система, представленная на рисунке 2, описывает движение жесткого вертикально вращающегося ротора, который удерживается радиальными электромагнитными подшипниками. Предполагается, что в направлении оси z ротор удерживается в центре масс электромагнитным подвесом. Движение ротора описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= l_2 \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,l}^2}{(\delta_0 - \eta_l)^2} - \frac{I_{1,l}^2}{(\delta_0 + \eta_l)^2} \right) - l_1 \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,u}^2}{(\delta_0 - \eta_u)^2} - \frac{I_{1,u}^2}{(\delta_0 + \eta_u)^2} \right) - J_z \omega \dot{\beta}, \\ J\ddot{\beta} &= l_1 \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,u}^2}{(\delta_0 - \xi_u)^2} - \frac{I_{4,u}^2}{(\delta_0 + \xi_u)^2} \right) - l_2 \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,l}^2}{(\delta_0 - \xi_l)^2} - \frac{I_{4,l}^2}{(\delta_0 + \xi_l)^2} \right) + J_z \omega \dot{\alpha}, \\ m\ddot{\xi} &= \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,u}^2}{(\delta_0 - \xi_u)^2} - \frac{I_{4,u}^2}{(\delta_0 + \xi_u)^2} \right) + \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,l}^2}{(\delta_0 - \xi_l)^2} - \frac{I_{4,l}^2}{(\delta_0 + \xi_l)^2} \right), \\ m\ddot{\eta} &= \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,l}^2}{(\delta_0 - \eta_l)^2} - \frac{I_{1,l}^2}{(\delta_0 + \eta_l)^2} \right) + \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,u}^2}{(\delta_0 - \eta_u)^2} - \frac{I_{1,u}^2}{(\delta_0 + \eta_u)^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где α, β – углы поворота ротора относительно осей x и y , ξ и η – координаты центра масс ротора, l_1 и l_2 – расстояния от центра масс до верхнего и нижнего электромагнитных подшипников соответственно, J и J_z – главные моменты инерции ротора, ω – заданная угловая частота вращения ротора относительно оси z , δ_0 – зазор между ротором и электромагнитом, L_0 – индуктивность каждого из электромагнитов, $I_{k,u}$ и $I_{k,l}$ – силы тока в верхних и нижних подшипниках соответственно, $k=1,2,3,4$, $\xi_u, \xi_l, \eta_u, \eta_l$ – измеряемые смещения ротора в верхних и нижних электромагнитных подшипниках. Эти величины для жесткого ротора связаны с координатами центра масс ротора ξ, η кинематическими соотношениями (в предположении о малых α и β $\sin \alpha \approx \alpha, \sin \beta \approx \beta$)

$$\xi_l = \xi - \beta l_2, \xi_u = \xi + \beta l_1, \eta_l = \eta + \alpha l_2, \eta_u = \eta - \alpha l_1. \quad (2)$$

Выразим управления через электромагнитные силы по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,u}^2}{(\delta_0 - \eta_u)^2} - \frac{I_{1,u}^2}{(\delta_0 + \eta_u)^2} \right), u_2 = \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{2,l}^2}{(\delta_0 - \eta_l)^2} - \frac{I_{1,l}^2}{(\delta_0 + \eta_l)^2} \right), \\ u_3 &= \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,u}^2}{(\delta_0 - \xi_u)^2} - \frac{I_{4,u}^2}{(\delta_0 + \xi_u)^2} \right), u_4 = \frac{L_0 \delta_0}{2} \left(\frac{I_{3,l}^2}{(\delta_0 - \xi_l)^2} - \frac{I_{4,l}^2}{(\delta_0 + \xi_l)^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

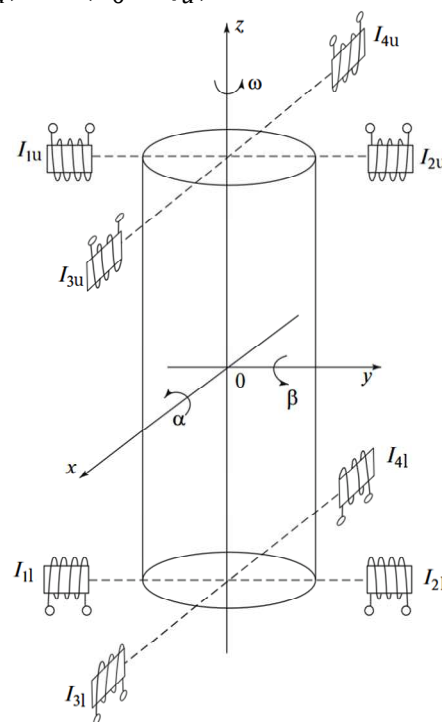


Рис. 2. Модель вертикального ротора

Приведем систему (1) к безразмерному виду заменой переменных:

$$\xi = \delta_0 \xi', \quad \eta = \delta_0 \eta', \quad t = T t', \quad u_k = \gamma u_k', \quad \alpha = \frac{\delta_0}{l_0} \alpha', \quad \beta = \frac{\delta_0}{l_0} \beta',$$

где $T = \sqrt{m \delta_0 / \gamma}$, $l_0 = l_1 + l_2$.

В новых переменных (для простоты обозначений штрихи опущены) уравнения движения (с учетом внешних воздействий w_i) принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{m l_0 l_2}{J} u_2 - \frac{m l_0 l_1}{J} u_1 - \frac{J_z T \omega}{J} \dot{\beta} + w_1, \\ \ddot{\beta} &= \frac{m l_0 l_1}{J} u_3 - \frac{m l_0 l_2}{J} u_4 - \frac{J_z T \omega}{J} \dot{\alpha} + w_2, \\ \ddot{\xi} &= u_3 + u_4 + w_3, \quad \ddot{\eta} = u_1 + u_2 + w_4. \end{aligned} \quad (4)$$

В безразмерных переменных соотношения (2) примут вид

$$\xi_l = \xi - \beta v_2, \quad \xi_u = \xi + \beta v_1, \quad \eta_l = \eta + \alpha v_2, \quad \eta_u = \eta - \alpha v_1, \quad (5)$$

где $v_1 = l_1 / l_0$, $v_2 = l_2 / l_0$.

Двухкритериальная задача управления. Для формулировки задачи управления запишем систему (4) в матричной форме

$$\dot{x} = A x + B_w w + B_u u, \quad x(0) = 0, \quad (6)$$

где $x = (\alpha, \beta, \xi, \eta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\xi}, \dot{\eta})$ – состояние, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ – управление,

$w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ – возмущение $\|w\|^2 = \int_0^\infty |w|^2 dt < \infty$.

Для описания переходных процессов в системе, определим целевые выходы $z_1 \in R^{n_{z1}}$ и $z_2 \in R^{n_{z2}}$ соотношениями

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 x + D_1 u, \quad z_2 = C_2 x + D_2 u, \\ C_1 &= (C_s \ 0_4), \quad C_2 = (0_4 \ 0_4), \quad C_s = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 1 & 0 \\ 0 & -v_2 & 1 & 0 \\ -v_1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$D_1 = 0_4, \quad D_2 = I_4.$$

Таким образом, целевой выход z_1 совпадает с вектором $(\xi_u, \xi_l, \eta_u, \eta_l)$, следовательно, представляет собой вектор смещений ротора в верхних и нижних электромагнитных подшипниках, а целевой выход z_2 представляет собой вектор управлений (u_1, u_2, u_3, u_4) .

В качестве количественной характеристики переходного процесса будем рассматривать ∞ -норму соответствующего целевого выхода

$$\|z_j\|_\infty = \max_{k=1,2,3,4} \left(\sup_{t \geq 0} |z_j^k| \right), \quad j=1,2,$$

где z_j^k – k -ая компонента целевого выхода z_j .

Рассмотрим функционалы, характеризующие качество переходных процессов, протекающих в системе (6). Для оценки максимально возможных отклонений ротора в верхних и нижних электромагнитных подшипниках по отношению к неизвестным внешним возмущениям w определим функционал J_1 выражением

$$J_1(u) = \sup_{w \neq 0} \left(\frac{\max(\sup_{t \geq 0} |\xi_u|, \sup_{t \geq 0} |\xi_l|, \sup_{t \geq 0} |\eta_u|, \sup_{t \geq 0} |\eta_l|)}{\|w\|} \right) = \sup_{w \neq 0} \left(\frac{\|z_1\|_\infty}{\|w\|} \right). \quad (7)$$

Для оценки максимальных значений управлений по отношению к неизвестным внешним возмущениям определим функционал J_2 выражением

$$J_2(u) = \sup_{w \neq 0} \left(\frac{\max(\sup_{k=1,2,3,4} \sup_{t \geq 0} |u_k|)}{\|w\|} \right) = \sup_{w \neq 0} \left(\frac{\|z_2\|_\infty}{\|w\|} \right). \quad (8)$$

Далее рассматривается двухкритериальная задача управления с критериями (7) и (8), представляющими обобщенные H_2 -нормы системы (6) [4].

Определим управление в виде ПД-регулятора с параметрами a, b так, чтобы каждое u_k линейно зависело только от «своих» локальных переменных

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_2(a\eta_u + b\dot{\eta}_u), \quad u_2 = -v_1(a\eta_l + b\dot{\eta}_l), \\ u_3 &= -v_2(a\xi_u + b\dot{\xi}_u), \quad u_4 = -v_1(a\xi_l + b\dot{\xi}_l). \end{aligned} \quad (9)$$

Система (4), замкнутая регулятором (9), с учетом (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= -\mu(a\alpha + b\dot{\alpha}) - \rho\dot{\beta} + w_1, \quad \ddot{\beta} = -\mu(a\beta + b\dot{\beta}) + \rho\dot{\alpha} + w_2, \\ \ddot{\xi} &= -(a\xi + b\dot{\xi}) + w_3, \quad \ddot{\eta} = -(a\eta + b\dot{\eta}) + w_4, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu = ml_1l_2 / J$, $\rho = J_z\omega T / J$. Параметры a, b вычисляются как в [5]:

$$a = \frac{1-\varphi}{v_1\varphi} \sqrt{\frac{v_1^2 + \mu^2}{3(v_2^2 + \mu^2)}}, \quad b = \frac{2^{1/2}}{3^{1/4}} \frac{(v_1^2 + \mu^2)^{1/4} (v_2^2 + \mu^2)^{1/4}}{\sqrt{v_1\mu(v_1^2 + \mu)}} \sqrt{\frac{1-\varphi}{\varphi}},$$

где φ – параметр свертки критериев.

Приведем результаты численного решения для значений параметров, соответствующих маломасштабной установке: $J = 0,74 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $l_1 = 0,3 \text{ м}$, $l_2 = 0,2 \text{ м}$, $m = 13,7 \text{ кг}$, $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $\omega = 314 \text{ рад/с}$, $\mu = 1,11$, $\gamma = 17,125$. На рисунке 3 изображено множество Парето в плоскости критериев J_1, J_2 . На рисунке 4 изображено множество Парето в плоскости параметров a, b .

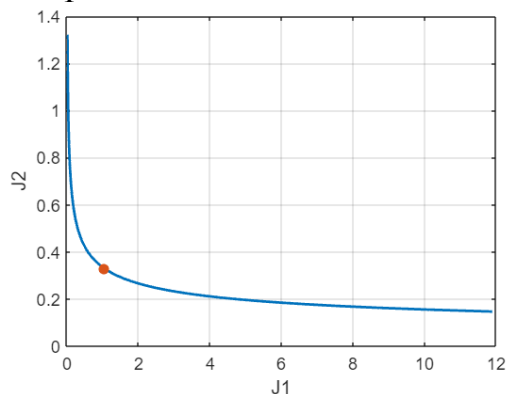


Рис. 3. Парето оптимальный фронт в плоскости критериев

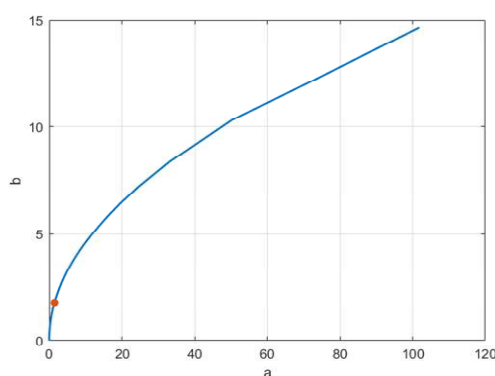


Рис. 4. Парето оптимальное решение в плоскости параметров

На рисунке 5 приведен график переходных процессов в системе (10) (на примере переменной ξ_u) при внешнем возмущении:

$$w = 0,5 \cdot e^{-0,05t} \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \end{pmatrix}.$$

Для построения графика переходных процессов на рисунке 3 выбрана точка (1,044; 0.33); соответствующая точка на плоскости параметров (рис. 4) отмечена красным цветом. Заметим, что при данных значениях параметров модели и указанном внешнем воздействии, максимальная величина управляющей силы не превышает 8 Н.

Заключение. Синтезировано Парето оптимальное децентрализованное управление активными магнитными подшипниками. Децентрализованное управление определяется всего двумя коэффициентами обратной связи, тогда как обратная связь по состоянию включает 32 коэффициента обратной связи. Таким образом, децентрализованное управление существенно проще в практической реализации. Приведены результаты расчета Парето оптимальных параметров децентрализованного оптимального управления, дано графическое представление Парето-оптимального фронта на плоскости критериев оптимизации.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

Список литературы

1. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники. – СПб.: Политехника, 2002. – 201 с.
2. Schweitzer G., Maslen E.H. Magnetic bearings. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 535 p.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Управление движением вертикального жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2011. – №. 5. – С. 3-17.
4. Wilson D.A. Convolution and Hankel operator norms for linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989, vol. 34, no. 1, pp. 94-97.
5. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное по Парето управление ротором в электромагнитных подшипниках // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2018. – № 6. – С. 131-142.

Сведения об авторах:

Исаева Диана Ильнуровна – аспирант, младший научный сотрудник.

Баландин Дмитрий Владимирович – д. ф.-м. н., профессор.

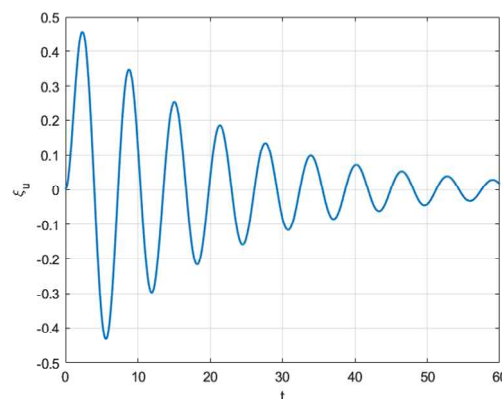


Рис. 5. Смещение ротора в верхнем подшипнике