

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Ткаченко П.П., Баландин Д.В.

Научно-технологический университет «Сириус», Сириус

Ключевые слова: оптимальное управление, многокритериальная задача управления, линейно матричные неравенства, обобщенная H_2 -норма, свертка Гермейера, гашение колебаний, сейсмическое воздействие.

Аннотация. В статье рассматривается вопрос оптимального управления связанными объектами при неизвестных внешних возмущениях, принадлежащих классу L_2 . Формулируется многокритериальная задача поиска управления в форме обратной связи, где в роли критериев выбраны максимальные деформации каждого объекта, а также максимальное управляющее воздействие, описываемые как функции времени и принадлежащие классу L_∞ . Показаны результаты применения алгоритма в общем случае (при наихудшем возможном возмущении) и частном случае (для конкретного возмущения).

OPTIMAL DAMPING OF VIBRATIONS OF COUPLED MECHANICAL ELASTIC OBJECT

Tkachenko P.P., Balandin D.V.

Sirius University of Science and Technology, Sirius

Keywords: optimal control, multi-criteria control problem, linear matrix inequalities, generalized H_2 -norm, Hermeyer convolution, vibration damping, seismic excitation.

Abstract. The article considers the issue of optimal control of coupled objects under unknown external disturbances belonging to the L_2 class. A multi-criteria control search problem is formulated in the form of feedback, where the maximum deformations of each object are selected as criteria, as well as the maximum control effect, described as functions of time and belonging to the L_∞ class. The results of applying the algorithm are shown in the general case (for the worst possible disturbance) and in the special case (for a specific disturbance).

Введение

Одна из актуальных проблем на сегодняшний день заключается в минимизации получаемого ущерба объектами при наличии внешних возмущений, действующих на них. В частности, защита сооружений, в районах подверженных сейсмической активности. Один из наиболее изучаемых сейчас подходов заключается в структурном контроле [1, 2] над объектами. Защищаемый объект описывается как некоторый набор компонент (в самом простом случае, как множество материальных точек), связанных между собой определенным образом, к которому применяется некоторое управляющее воздействие позволяющее компенсировать влияние, порождаемое внешними возмущениями. Сложность задачи заключается в том, что часто заранее неизвестен конкретный вид возмущения и в большом количестве факторов, которые необходимо учесть при синтезе управляющего воздействия. Такие задачи принято считать многокритериальными задачами оптимизации. В статье рассматривается задача управления системой двух связанных управляющим устройством механических объекта.

Описание механической системы

Рассмотрим задачу управления двумя механическими многомассовыми упругими объектами. Будем считать, что каждый объект содержит набор материальных точек n_1 и n_2 соответственно, связанных линейными упруго-диссипативными связями между собой и с общим основанием, которое совершает поступательное движение вдоль заданного направления. Объекты соединены между собой безынерционными управляющими устройствами. Математическая модель рассматриваемой системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{q}_1 + Q_1 \dot{q}_1 + G_1 q_1 &= F_1 u - M_1 l_1 w, \\ M_2 \ddot{q}_2 + Q_2 \dot{q}_2 + G_2 q_2 &= F_2 u - M_2 l_2 w, \end{aligned} \quad (1)$$

где $q_1 \in R^{n_1}, q_2 \in R^{n_2}$ – векторы, определяющие положение материальных точек относительно основания, $M_1, Q_1, G_1, M_2, Q_2, G_2$ – симметрические положительно определенные матрицы, элементы которых задают массовые, диссипативные и упругие параметры каждого из объектов, F_1, F_2 – матрицы, элементы которых задают точки приложения управляющего воздействия на каждый из объектов, u – вектор управляющих воздействий, $w = w(t)$ – ускорение основания, l_1, l_2 – векторы подходящих размерностей, каждая компонента которых равна 1.

Подобные системы широко используются для математического моделирования динамики высотных сооружений при сейсмических воздействиях [3]. Пример такой системы представлен на рисунке 1.

При поступательном движении основания приходит в движение и каждый из многомассовых объектов. Задача состоит в организации управления в форме обратной связи по измеряемым переменным (смещениям и скоростям материальных точек многомассовых объектов) таким образом, чтобы за счет управляемого взаимодействия

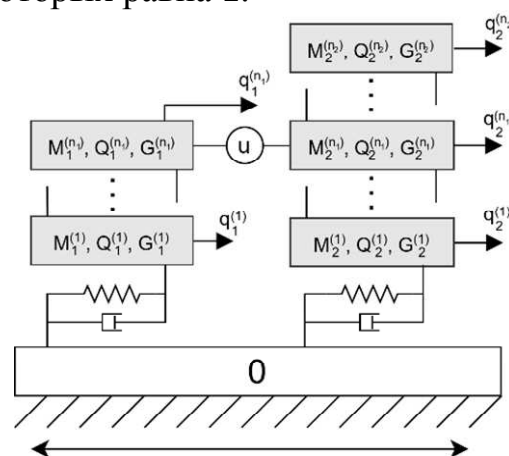


Рис. 1. Система из двух многомассовых объектов

объектов погасить их колебания в некотором смысле (далее будет указано в каком именно) наилучшим образом. С физической точки зрения можно дать следующую интерпретацию рассматриваемой задачи: с помощью управляющего воздействия перераспределить подходящим образом «поток» механической энергии от одного объекта к другому объекту с последующим ее рассеиванием. Важной особенностью задачи является отсутствие информации о функции $w(t)$, задающей ускорение основание. Предполагается, что известно лишь множество, которому может принадлежать эта функция. В качестве класса возможных возмущений будем рассматривать возмущения, принадлежащие L_2 – классу функций, интеграл от квадрата которых ограничен, что математически выражается также в виде: L_2 -норма возмущения $\|v\|_2$ ограничена, где

$$\|v\|_2 = \left(\int_0^\infty |v(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Целевые выходы определим как функции времени, принадлежащие классу L_∞

$$\|z_i\|_\infty = \max_t \max_j \left\{ |z_i^{(j)}(t)| \right\}, \quad (3)$$

где $z_i^{(j)}$ – компоненты вектора z_i .

В качестве показателя, характеризующего переходные колебательные процесс многомассового упругого объекта, будем рассматривать максимальное отношение (по всем возмущениям) L_∞ -нормы целевого выхода по отношению к L_2 -норме возмущения, известного также в теории управления, как обобщенная H_2 -норма линейного оператора [4,5]:

$$J_i = \max_{v \in L_2} \frac{\|z_i\|_\infty}{\|v\|_2}, i = 1, 2. \quad (4)$$

Перейдем к постановке задачи оптимального гашения колебаний многомассовых упругих объектов. Рассмотрим двухкритериальную задачу [4,5,6], в которой оба объекта будут «равноправными» по отношению к процедуре оптимизации. Тогда задача ставится следующим образом: в классе управлений в форме обратной связи

$$u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \quad (5)$$

найти матрицу обратной связи $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, обеспечивающую минимизацию в смысле Парето векторного критерия $\{J_1(\theta), J_2(\theta)\}$. Неформального говоря, требуется найти управление, обеспечивающее множество «компромиссных решений» между двумя принятыми, показателями, характеризующими рассматриваемые объекты.

Для решения задачи воспользуемся известным в теории многокритериальной оптимизации подходом, связанным со сверткой векторного критерия в один скалярный критерий. В данной задаче оказывается удобным использовать свертку Гермейера [5, 6]:

$$J_\alpha(\theta) = \max \left\{ \frac{J_1}{\alpha_1}, \frac{J_2}{\alpha_2} \right\} \rightarrow \min, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0. \quad (6)$$

Результаты работ [4-6] позволяют указать алгоритм решения поставленной двухкритериальной задачи. Парето-оптимальное множество матриц обратной связи θ представляется, как двухпараметрическое (по параметрам α_1, α_2) семейство $\theta_\alpha = Z_\alpha Y_\alpha^{-1}$, где Z_α и симметрическая положительно определенная матрица Y_α являются решением задачи полуопределенного программирования

$$\gamma^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

при ограничениях в виде линейных матричных уравнений и неравенств относительно матриц Z и Y , а также скалярного параметра γ^2 .

В заключение этого раздела следует сделать важное замечание. Из многих монографий и статей по теории управления хорошо известно, что для систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с управлением в форме обратной связи по состоянию, отсутствие ограничений на управление приводит к стремлению параметров линейной по переменным состояния

управляющей функции к бесконечности. Чтобы избежать указанного явления в рассматриваемой задаче добавим к двум показателям (4) еще одно ограничение:

$$J_u = \max_{v \in L_2} \frac{\max_t |u(t)|}{\|v\|_2} \leq \rho. \quad (8)$$

Численное моделирование системы двух однородных одномерных цепочек материальных точек.

Приведем результаты численного моделирования для системы из двух однородных объектов, отличающихся только параметрами $n_1 = 10, n_2 = 6$.

В качестве показателей (4) рассматриваемой механической системы выберем максимальные деформации каждого объекта. Тогда критерии будут иметь вид:

$$J_i = \max_{v \in L_2} \frac{\max_t \max_{j \in [1, n_i]} \{ |q_i^{(j)}(t) - q_i^{(j-1)}(t)| \}}{\|v\|_2}, i = 1, 2. \quad (9)$$

Здесь формально полагается, что координаты $q_1^{(0)}(t) = q_2^{(0)}(t) \equiv 0$.

Приведем сравнений результатов, полученных при помощи активного управления в форме обратной связи и более простого в реализации пассивного управляющего устройства – демпфера, для которого управление будет иметь вид: $u_d = \theta_d(\dot{q}_1^{(j)} - \dot{q}_2^{(k)})$.

Построим график оптимальных по Парето решений. Каждое из решений, расположенных на этом графике (в зависимости от параметров α_1, α_2) является оптимальным решением двухкритериальной задачи (6). Множество значений критериев, расположенных над графиком, является неоптимальными решениями хотя бы по одному из критериев. Множество значений, расположенных ниже графика являются недостижимыми для сформулированной задачи.

Анализируя полученные результаты (рис. 2), можно заметить, что при помощи активного управление по обратной связи удалось найти решения, которые хотя бы по одному критерию лучше (хотя бы один из критериев меньше), чем значение критериев, полученных при нулевом управлении или при пассивном управлении при помощи демпфера. Данный результат получен для наихудейшего возможного возмущения. Рассмотрим пример с заданным возмущением. Пусть возмущение будет иметь вид: $v = e^{-\eta t} \sin \omega t$.

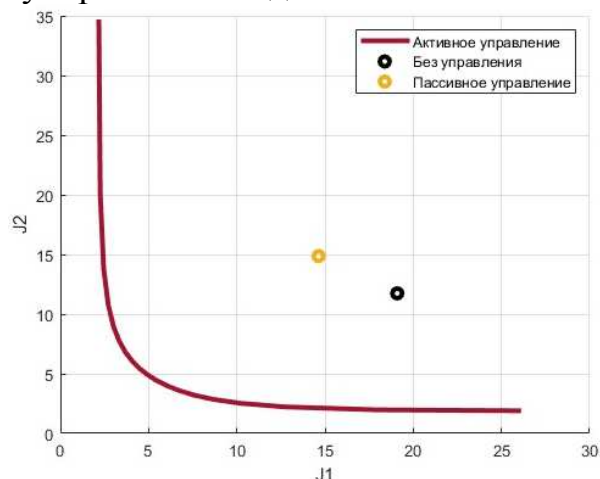


Рис. 2. Парето оптимальный фронт

Выберем материальную точку в каждом объекте, для которой рассмотрим переходный процесс, происходящий при отсутствии управления и в случае активного управления в форме обратной связи. На рисунке 3 приведен пример

при значении параметра $\alpha = 0,8$. Из полученных результатов видно, что наличие управления для первого объекта привело к небольшому увеличению амплитуды колебаний в первой половине времени и уменьшению амплитуды в оставшееся время. Однако, это позволило значительно уменьшить амплитуду колебаний второго объекта.

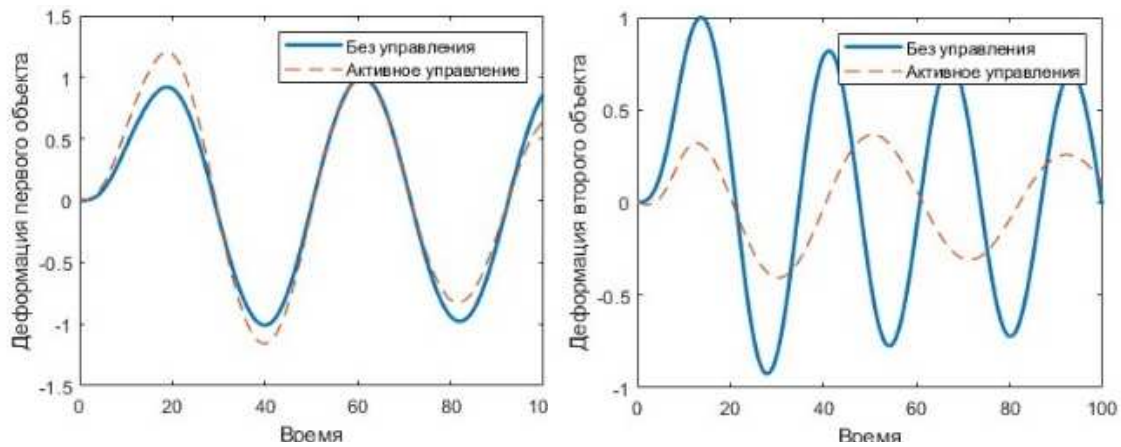


Рис. 3. Графики переходных процессов

Рассмотрим, как при этом будут меняться значения критериев (максимальные деформации каждого объекта). Из графиков (рис. 4) видно, что, незначительно увеличив максимальные колебания первого объекта, удалось в более чем 2 раза улучшить показатель второго объекта.

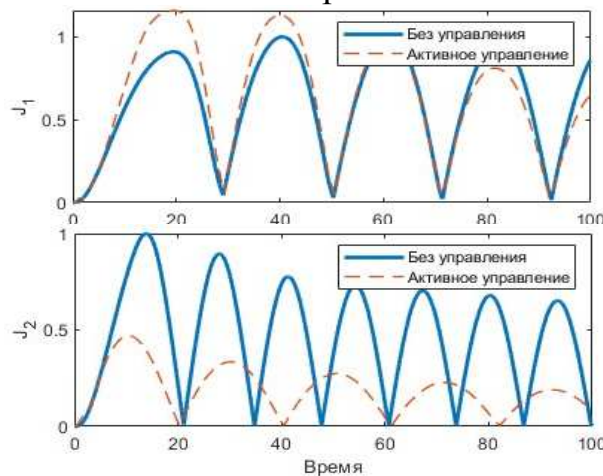


Рис. 4. Зависимость максимальных деформаций от времени

Заключение

В статье рассмотрена задача синтеза оптимального управления для гашения колебаний связанных механических упругих объектов при неполной информации о внешних возмущениях, действующих на систему. Сформулирована многокритериальная задача управления, для которых внешние возмущения принадлежат L_2 -классу функций, а в роли критериев выбраны максимальные деформации каждого из объектов и максимальное управляющее воздействие, описываемые как функции времени, принадлежащие классу L_∞ . Показано, что предлагаемый подход позволяет улучшить (уменьшить хотя бы один из критериев) значение критериев, как в общем случае, предполагая, что возмущение наихудшее из возможных, так и на конкретном примере.

Финансирование. Данная работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

Список литературы

1. Doroudi R., Lavassani S.H.H., Connection of coupled buildings: A state-of-the-art review // Structures. 2021, vol. 33, pp. 1299-1326.
2. Shelenok E. Combined repetitive control system for active damping of forced vibrations // Cybernetics and physics. 2024, vol. 13, pp. 69-76.
3. Wilson D.A. Convolution and Hankel operator norms for linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989, vol. 34, no. 1, pp. 94-97.
4. Баландин Д.В., Коган М.М., Оптимальное по Парето обобщенное H2-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №8. – С. 76-90. – doi.org/10.1134/S0005117917080033.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H2-управление и задачи виброзащиты. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2007. – 280 с.
6. Tkachenko P.P., Balandin D.V. Mutual Suppression of Oscillations for Coupled Mechanical Structures Based on Two-Objective Control // 2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 2024, pp. 697-702. doi.org/10.1109/RusAutoCon61949.2024.10694104.

Сведения об авторах:

Ткаченко Полина Павловна – младший научный сотрудник;

Баландин Дмитрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор.