

РАСЧЕТ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Грибова О.В.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: правильная ферма, метод Донкерлея, Maple, аналитическое решение, наименьшая частота.

Аннотация. Предложена новая схема плоской фермы с возвышением ее средней части. Получена окончательная зависимость первой частоты собственных колебаний узлов фермы от ее размера, массы и количества панелей. Сравнение с приближенным численным решением, полученным с учетом всех степеней свободы конструкции, показало хорошую точность найденной формулы.

CALCULATION OF THE FIRST NATURAL VIBRATION FREQUENCY OF A FLAT TRUSS

Gribova O.V.

National Research University "MEI", Moscow

Keywords: regular truss, deflection, Dunkerley method, Maple, analytical solution, lowest frequency.

Abstract. A new scheme of a flat farm with an elevation of its middle part is proposed. The final dependence of the first frequency of natural oscillations of the farm nodes on its size, mass and number of panels is obtained. A comparison with the approximate numerical solution obtained taking into account all degrees of freedom of the structure showed good accuracy of the formula found.

Введение

Определение собственных частот колебаний строительных конструкций является одной из основных задач строительной механики. Особенности аналитического расчета на примере плоской фермы посвящена настоящая работа. Методы оптимизации ферм с ограничениями на частоты собственных колебаний разработаны в [1]. Аналитические решения для элементов строительных конструкций с использованием метода начальных функций с привлечением системы компьютерной математики получены в [2]. Рассматривается статически определимая ферма с подъемом средней ее части и с двумя неподвижными шарнирными опорами. Определяется приближенное аналитическое выражение для первой частоты собственных колебаний.

Конструкция фермы

Плоская ферма (рис. 1, 2) балочного типа с двумя неподвижными шарнирными опорами статически определима. Ферма с $2n$ панелями содержит $\eta = 8n + 4$ стержней, включая 4 стержня, моделирующие две неподвижные шарнирные опоры, и $K = 4n + 2$ внутренних узлов (рис. 2).

Решетка фермы крестообразная с подъемом в средней своей части. Длина боковых панелей $1,5a$, средних – $2a$. Высота фермы $3h$.

Формула для первой собственной частоты колебаний определяется с использованием системы компьютерной математики Maple. Ферма моделируется

шарнирно – стержневой решеткой с заданными координатами узлов. Узлы и стержни конструкции нумеруются (рис. 3).

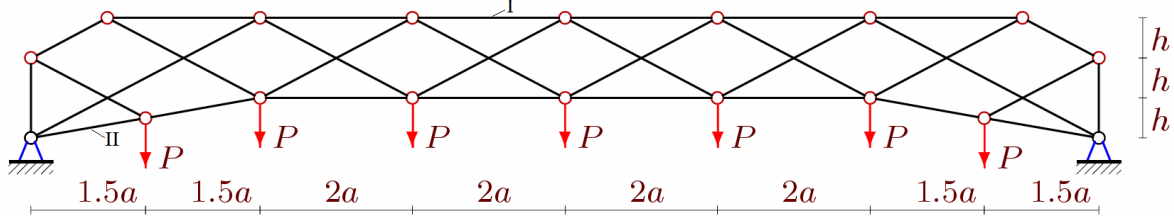


Рис. 1. Нагрузка на нижний пояс фермы, $n = 4$

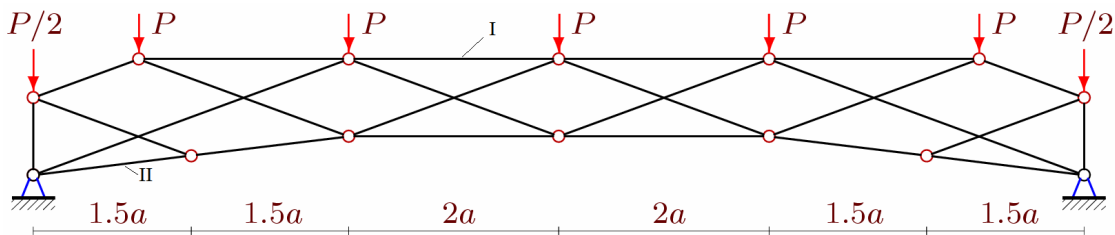


Рис. 2. Нагрузка на верхний пояс фермы, $n = 3$

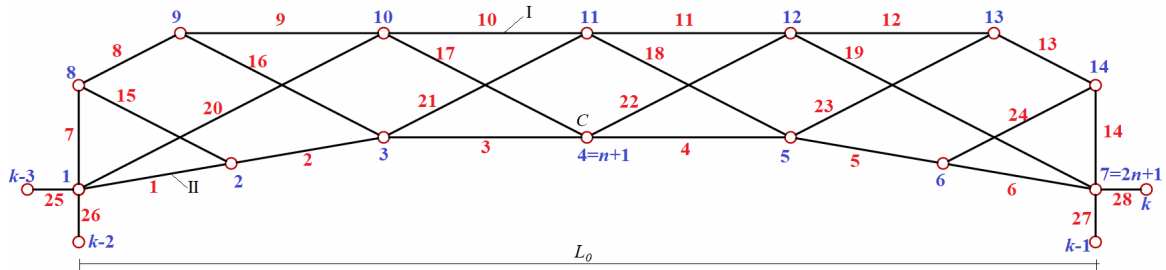


Рис. 3. Нумерация стержней и узлов

Ввод координат осуществляется в параметрической форме с произвольным числом панелей n в половине пролета. Начало координат выбирается в левой шарнирной опоре. На языке системы Maple координаты узлов имеют вид:

```
> L0:=2*a*(2*n-1); k:=4*n+2+4;
> x[1]:=0: y[1]:=0: x[2]:=3*a/2: y[2]:=h/2:
> for i to 2*n-3 do x[i+2]:=2*(i-1)*a+3*a; y[i+2]:=h; end:
> x[2*n]:=L0-3*a/2: y[2*n]:=h/2:
> x[2*n+1]:=L0: y[2*n+1]:=0:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=2*h:
> for i to 2*n-1 do x[i+2*n+2]:=2*i-a: y[i+2*n+2]:=3*h: end:
> x[4*n+2]:=L0: y[4*n+2]:=2*h:
> x[k-3]:=-a: y[k-3]:=0: #left hing
> x[k-2]:=0: y[k-2]:=-h: #left
> x[k-1]:=L0: y[k-1]:=-h: #right
> x[k]:=L0+a: y[k]:=0: #right
```

Структура решетки определяется порядком соединения стержней в узлы и вводится в текст Maple-программы с помощью специальных списков $\Phi_i, i = 1, \dots, \eta$ номеров концов соответствующих стержней. Стержни поясов, например, кодируются следующими номерами их концов: $\Phi_{i+2n+1} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2]$, $i = 1, \dots, 2n + 1$. Эти списки не ориентированы. На величину и знак усилия выбор начала и конца стержня не влияет. Точно также кодируются и стержни решетки, включая четыре опорные стержня. Каждая неподвижная опора моделируется

двумя взаимно перпендикулярными стержнями. Длины этих стержней определяют жесткость опор. Для определенности горизонтальные опорные стержни приняты длиной a , вертикальные – h .

Расчет первой частоты

Рассмотрим ферму с массой, равномерно распределенной по узлам. Пренебрегая горизонтальными движениями узлов, что частично оправдывается двумя неподвижными опорами, получаем, что число степеней свободы такой системы равно числу узлов K . Для приближенного расчета собственной частоты используется следующая формула [3]:

$$\omega^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \tilde{\Delta}_n,$$

где $\delta^{\max}$ – наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на узел p , m – масса узла.

Аналитическое значение $\tilde{\Delta}_n$ рассчитывается по формуле Максвелла – Мора в виде суммы по всем стержням конструкции, включая четыре опорные:

$$\tilde{\Delta}_n = \sum_{\alpha=1}^{\eta} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (1)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – значение усилия в стержне с номером α при воздействии на узел с номером p единичной вертикальной силы, l_{α} – длина соответствующего стержня. Жесткости EF всех стержней фермы считаются равными.

Расчет сумм в (1) для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\tilde{\Delta}_2 = K \left(9a^3 + d^3 + h^3 \right) / (4h^2 EF),$$

$$\tilde{\Delta}_3 = K \left(9a^3 + 5c^3 + h^3 \right) / (4h^2 EF),$$

$$\tilde{\Delta}_4 = K \left(33a^3 + 4c^3 + d^3 + h^3 \right) / (4h^2 EF),$$

$$\tilde{\Delta}_5 = K \left(65a^3 + 9c^3 + h^3 \right) / (4h^2 EF),$$

$$\tilde{\Delta}_6 = K \left(73a^3 + 8c^3 + d^3 + h^3 \right) / (4h^2 EF), \dots$$

В общем случае:

$$\tilde{\Delta}_n = K \left(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3 \right) / (EFh^2),$$

где коэффициенты получаются в системе Maple методом индукции:

$$C_1 = \left(4n^3 - 6(2(-1)^n + 5)n^2 + 8(9(-1)^n + 13)n - 87(-1)^n - 102 \right) / 12,$$

$$C_2 = \left(4n - 3(-1)^n - 5 \right) / 8, C_3 = \left((-1)^n + 1 \right) / 8, C_4 = 1 / 4.$$

Отсюда расчетная формула для первой собственной частоты имеет вид:

$$\omega^* = h \sqrt{\frac{EF}{mK \left(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3 \right)}}. \quad (2)$$

Числовой пример

Оценить аналитическое решение (2) можно сравнив его с численным решением, полученным из анализа частот собственных колебаний системы грузов с K степенями свободы. В системе Maple используем оператор **Eigenvalues**. На рисунке 4 даны кривые зависимости частоты колебаний от числа панелей, рассчитанной по формуле (2) и полученной численно без использования упрощенного метода Донкерлея. Рассматриваемая ферменная конструкция соответствует размерам $a=4$ м. Предполагается, что площадь поперечного сечения решеток и опор одинакова: $F=25\text{ см}^2$. Модуль упругости стали $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, масса в узлах $m=200$ кг.

Кривые весьма близки. Предложенное аналитическое решение отличается от метода Донкерлея более простым видом и большей точностью. При этом метод Донкерлея дает доказанную нижнюю оценку, а у использованного здесь варианта такой оценки нет. Частота может быть как больше, так и меньше численного решения, полученного без использованных в методе Донкерлея упрощений. Оценить погрешность аналитического решения можно по значению относительной ошибки $\varepsilon = |\omega_1 - \omega^*| / \omega_1$ (рис. 5).

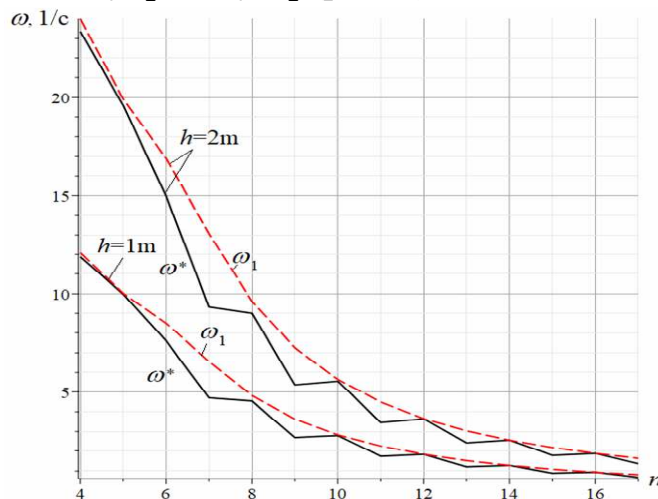


Рис. 4. Зависимость собственной частоты от количества панелей

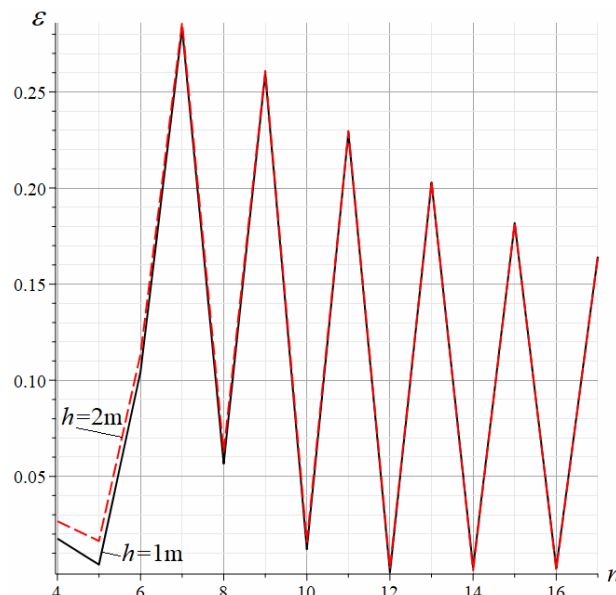


Рис. 5. Сравнительная погрешность методов

Сравнение показывает, что результат существенно зависит от четности числа панелей. Начиная с $n = 7$ погрешность для ферм с четным числом панелей существенно меньше, чем для ферм с нечетным n . В любом случае точность аналитического решения с увеличением числа панелей растет. Зависимости погрешности от высоты конструкции почти нет – кривые при $h = 1\text{м}$ и $h = 2\text{м}$ начиная с $n = 5$ почти сливаются.

Заключение

Рассмотрена новая схема регулярной статически определимой плоской фермы. В системе компьютерной математики методом индукции выведена аналитическая формула для нахождения первой собственной частоты для произвольного числа панелей. Существенным упрощением формы решения стало использования модификации метода Донкерлея, в котором не требуется суммирование при вычислении частоты.

Список литературы

1. Kaveh A., Zolghadr A. Meta-heuristic methods for optimization of truss structures with vibration frequency constraints // Acta Mech. 2018, vol. 229, pp. 3971-3992. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2234-z>
2. Matrosov A.V. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2022, vol. 73, p. 74. DOI: 10.1007/S00033-022-01714-Y.
3. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Прогибы и частоты колебаний (справочник). – М.: ИНФРА-М, 2025. – 196 с.

Сведения об авторе:

Грибова Ольга Валерьевна – старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин.