

ЧАСТОТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Льонг Конг Луан

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

Ключевые слова: ферма, усилие, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, упрощенный метод.

Аннотация. Объектом исследования является плоская модель статически определенной симметричной ферменной системы. Используя формулу Максвелла-Мора, находится матрица жесткости конструкции. Используя формулу Донкерлея, два упрощения формул Донкерлея и Рэлея для произвольного количества панелей, находится первая собственная частота колебаний фермы. Результаты аналитического метода сравниваются с результатами численного метода. Проведен анализ частотного спектра фермы и сделаны выводы о зависимости частоты от размера панелей.

NATURAL FREQUENCY OF A HINGED-ROD TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Luong Cong Luan

National Research University "MPEI, Moscow

Keywords: truss, force, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, simplified method.

Abstract. The object of the study is a flat model of a statically determined symmetric truss system. Using the Maxwell-Mohr formula, the rigidity matrix of the structure is found. Using the Dunkerley formula, two simplifications of the Dunkerley and Rayleigh formulas for an arbitrary number of panels, the first natural frequency of truss oscillations is found. The results of the analytical method are compared with the results of the numerical method. The frequency spectrum of the truss is analyzed and conclusions are made about the dependence of the frequency on the size of the panels.

Рассматриваемая симметричная ферма с $2n$ панелями представляет собой плоскую рамную конструкцию с пролетом $L = 4a(n+1)$ и имеет ромбовидную решетку с двумя неподвижными опорами (рис. 1).

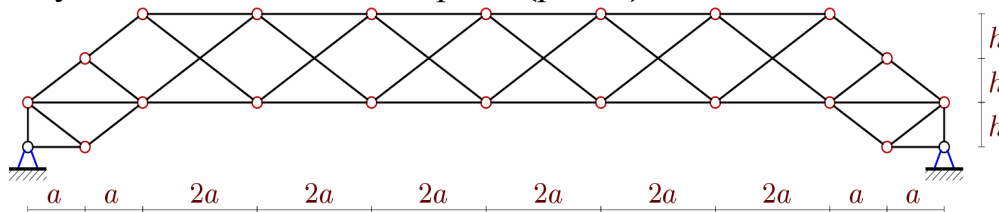


Рис. 1. Ферма, число панелей $n = 3$, a – длина стержня, h – высота стержня в конструкции

Нижняя оценка первой частоты колебания масс M в узлах фермы по методу Донкерлея имеет следующий вид [1]:

$$\omega_D^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p, \quad (1)$$

Здесь ω_D – первая частота колебания, полученная методом Донкерлея, K – число степеней свободы, δ_p – обратный к коэффициенту податливости.

Из решения однородных линейных рекуррентных уравнений получаются следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(64n^5 + 80n^4 + 680n^3 + 1750n^2 + 1566n + 585)}{45(n+1)}, \\ C_2 &= \frac{(8n^3 + 24n^2 + 25n + 10)}{2(n+1)}, \\ C_3 &= \frac{16n^3 + 78n^2 + 98n + 39}{3(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Упрощенная формула метода Донкерлея использована в [2] для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. Формула, основанная на упрощенном вычислении суммы по значению максимального ее слагаемого (теорема о среднем), имеет следующий вид:

$$\omega_*^{-2} = \sum_{p=1}^K u_p = Ku_* / 2, \quad (3)$$

где ω_* – первая частота упрощенного метода Донкерлея, u_p – прогиб узла фермы, u_* – максимальный парциальный прогиб некоторого узла фермы от действия на ферму единичной силы, приложенной к этому узлу.

В исследуемой ферме при разных значениях n величина u_* достигает максимального значения в среднем узле нижнего пояса с номером $n+3$. При произвольном количестве панелей n , общая формула принимает следующий вид

$$\begin{aligned} C_1 &= (n^4 + 10n^3 + 20n^2 + 68n + 45 - (12n^3 - 24n^2 + 27n + 30)(-1)^n) / 3, \\ C_2 &= 2n^2 + 7n + 5, \\ C_3 &= 2n + 5. \end{aligned}$$

Альтернативный метод упрощение вычислений первой собственной частоты – метод Рэлея [3]. Формула Рэлея для определения первой собственной частоты фермы имеет следующий вид:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i / \sum_{i=1}^K m\tilde{u}_i^2, \quad (4)$$

где ω_R – первая частота метода Рэлея, $\tilde{u}_i$ – максимальная ордината обозначена.

Коэффициенты получены методом индукции:

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 - 4n^2 + 48n + 45 - (16n^3 + 12n^2 + 64n + 39)(-1)^n) / 6, \\ C_2 &= (4n^2 + 8n + 9 - 3n(-1)^n) / 4, \\ C_3 &= 4n + 9. \end{aligned}$$

Зависимость частоты собственных колебаний от порядка фермы, полученная тремя предложенными методами, сравнивается с минимальным значением всего спектра частот, полученным численным методом.

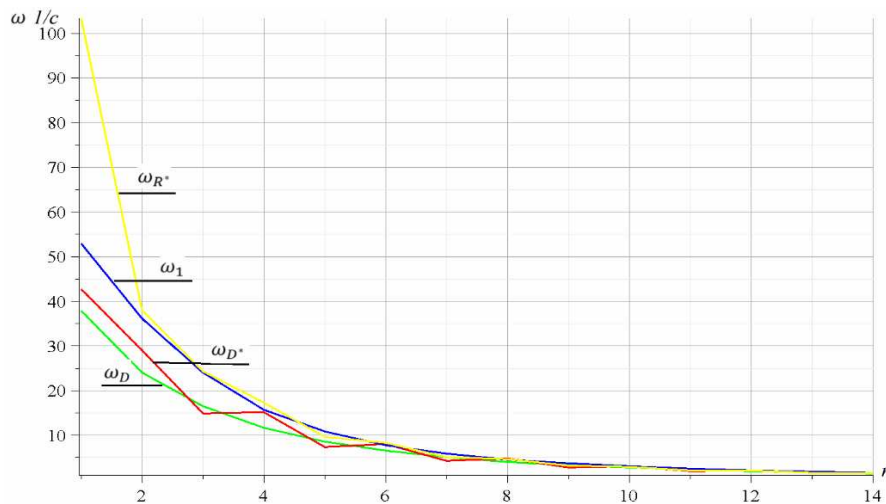


Рис. 2. Зависимость первой частоты от количества панелей фермы: ω_1 – это результат, полученный численным методом

Из графика первое, что видно, это то, что первая частота фермы, полученная всеми тремя предложенными методами, монотонно убывает и быстро сходится к решению численного метода по мере увеличения числа панелей фермы. Результаты, полученные методом Донкерлея и его упрощенным вариантом, имеют небольшие погрешности по сравнению с численным методом. Для метода Рэлея при небольшом количестве панелей полученные результаты сильно отклоняются от всех других методов, однако это не оказывает существенного влияния на применимость этого метода. Ведь на практике фермы с таким малым количеством панелей используются редко. При $n \geq 2$ результаты этого метода хорошо сходятся и приближаются к кривой численного решения. Это показывает, что все методы, предложенные в аналитическом примере, дают хорошие результаты и подходят для первой оценки частоты при большом количестве панелей фермы.

Список литературы

1. Kirsanov M. Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020, vol. 99, p. 9904. doi.org/10.4123/CUBS.99.4.
2. Lyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // Structural mechanics and structures. 2019, no. 3(22), pp. 29-38.
3. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution // AIP Conference Proceedings. 2023, vol. 2612, no. 1, p. 040005.

Сведения об авторе:

Льонг Конг Луан – аспирант.