

## УПРЕЖДАЮЩЕЕ СЛЕДЯЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА МЕТОДОМ MPC

*Нимирич Н.С.<sup>1</sup>, Филимонов Н.Б.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва;*

<sup>2</sup>*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*

**Ключевые слова:** квадрокоптер, управление движением, метод MPC, алгоритм упреждающего следящего управления, компьютерная апробация алгоритма управления.

**Аннотация.** Статья посвящена компьютерному анализу эффективности алгоритма упреждающего следящего управления движением квадрокоптера в условиях параметрических возмущений модели его динамики. Синтез алгоритма упреждающего управления квадрокоптером основан на одном из перспективных методов современной теории управления – методе управления с прогнозирующими моделями (MPC – Model Predictive Control). Эффективность синтезированного алгоритма управления анализируется методом компьютерной апробации в среде Python с параметрическим возмущением массы квадрокоптера.

## PROACTIVE MOTION CONTROL BY QUADCOPTER METHOD MPC

*Nimirich N.S.<sup>1</sup>, Filimonov N.B.<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow;*

<sup>2</sup>*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow*

**Keywords:** quadcopter, motion control, MPC method, proactive tracking control algorithm, computer testing of the control algorithm.

**Abstract.** The article is devoted to a computer analysis of the effectiveness of the algorithm of proactive tracking motion control of a quadcopter in the conditions of parametric perturbations of its dynamics model. The synthesis of the quadcopter proactive control algorithm is based on one of the promising methods of modern control theory – the control method with predictive models (MPC – Model Predictive Control). The effectiveness of the synthesized control algorithm is analyzed by method of computer testing in the Python environment with a parametric perturbations of the quadcopter mass.

В современной теории и практике автоматического управления все большую популярность приобретают стратегии управления с прогнозом, обладающие способностью на основе информации о динамике управляемого объекта предвосхищать его будущее поведение. Данные стратегии управления исходят из принципа, который наиболее лаконично отражает известное изречение Наполеона I (В. Napoléon): «*Управлять – значит предвидеть*». В связи с этим одним из наиболее перспективных и востребованных методов современной теории автоматического управления является метод управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control, MPC), разработанный в 60-80-х годах прошлого столетия [1-5].

В последние годы метод MPC нашел широкое применение в системах автоматического управления подвижными объектами, включая беспилотные летательные аппараты (БПЛА, дроны) и, в частности, квадрокоптеры (КК) [6-11]. Для синтеза управления данными аппаратами используются самые разные подходы, методы и алгоритмы. Так, например, в работе авторов [12] дан

сравнительный анализ алгоритмов робастного следящего управления движением КК, основанных на широко распространенных современных методах нелинейного управления: методе скользящих режимов, методе бэкстеппинга, методе линеаризации обратной связью и методе «глубокой» обратной связи. В настоящей работе представлены результаты разработки и компьютерной апробации в среде Python MPC-алгоритма следящего управления движением КК в условиях параметрического возмущения массы аппарата.

### Математическая модель движения КК

Современный КК – это высокоманевренный БПЛА вертолетного типа с четырьмя симметрично расположенными несущими воздушными винтами (пропеллерами), вращающимися диагонально в противоположных направлениях и создающими тягу, обеспечивающую управление движением аппарата путем изменения скорости вращения каждого винта. Здесь КК рассматривается как абсолютно жесткая осесимметричная система с шестью степенями свободы, соответствующих поступательному и вращательному движениям аппарата. Схематичное изображение и геометрическая модель КК представлены на рисунке 1.

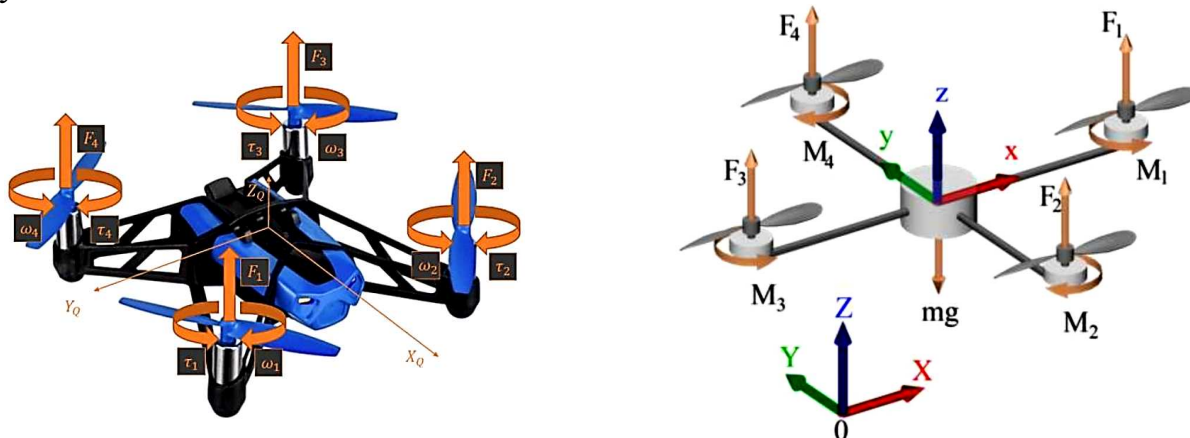


Рис. 1. Схематичное изображение и геометрическая модель КК

Каждый несущий винт, совершая вращение, создает силу тяги и угловой момент, обеспечивая подъем и маневрирование КК, а также создает аэродинамический момент, направленный в противоположном направлении вращения винта. В качестве переменных состояния КК выбраны его пространственные и угловые координаты вместе с их производными, а в качестве математической модели пространственного движения принята следующая система дифференциальных уравнений Ньютона-Эйлера, описывающих объединенную поступательную (1) и вращательную (2) динамику аппарата с учетом аэродинамического сопротивления:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi)]}{m} - \frac{k_x}{m} \dot{x}, \\ \ddot{y} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cos(\psi)]}{m} - \frac{k_y}{m} \dot{y}, \\ \ddot{z} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \cos(\theta)]}{m} - \frac{k_z}{m} \dot{z} - g, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{u_{\phi}}{I_x} + \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \dot{\psi} \dot{\theta} - \frac{I\Omega}{I_x} \dot{\theta} - \frac{k_{\phi}}{I_x} \dot{\phi}^2, \\ \ddot{\theta} = \frac{u_{\theta}}{I_y} + \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \dot{\psi} \dot{\phi} - \frac{I\Omega}{I_y} \dot{\phi} - \frac{k_{\theta}}{I_y} \dot{\theta}^2, \\ \ddot{\psi} = \frac{u_{\psi}}{I_z} + \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \dot{\theta} \dot{\phi} - \frac{k_{\psi}}{I_z} \dot{\psi}^2, \end{cases} \quad (2)$$

где,  $m$  – масса аппарата;  $I$  – сумма моментов инерций винтов относительно оси  $z$ ;  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции винтов относительно соответствующих осей, причем  $I_x = I_z$ ;  $k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления перемещению;  $k_{\phi}, k_{\theta}, k_{\psi}$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления вращению;  $\phi, \theta, \psi$  – углы крена, тангажа и рысканья;  $x, y, z$  – координаты центра масс аппарата;  $\Omega = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i$  – суммарная угловая скорость вращения всех четырех винтов,  $\omega_i$

– угловая скорость вращения  $i$ -го винта;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;  $u_z, u_{\phi}, u_{\theta}, u_{\psi}$  – четыре управляющих воздействия (общая тяга и три крутящих момента), обеспечивающие соответственно подъем, спуск и повороты аппарата вокруг своих осей.

Таким образом, КК, как объект управления, представляет собой 12-ти мерную нелинейную динамическую систему (1), (2), входом, выходом и состоянием которой являются соответственно следующие три вектора  $\mathbf{u} \in R^4$ ,  $\mathbf{y} \in R^6$  и  $\mathbf{x} \in R^{12}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_z, u_{\phi}, u_{\theta}, u_{\psi})^T, \quad \mathbf{y} = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)^T, \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T, \\ x_1 &= z, x_2 = \dot{z}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}, x_5 = y, x_6 = \dot{y}, \\ x_7 &= \phi, x_8 = \dot{\phi}, x_9 = \theta, x_{10} = \dot{\theta}, x_{11} = \psi, x_{12} = \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Суммарная тяга  $P$ , образованная всеми четырьмя винтами:

$$P = (u_x^2 + u_y^2 + (u_z + mg)^2)^{1/2},$$

и крутящие моменты  $M_{\phi}, M_{\theta}, M_{\psi}$ , обеспечивающие пространственные маневры КК, прямо пропорциональны квадратам угловых скоростей вращения винтов  $\omega_i, i = 1, 4$ :

$$\begin{pmatrix} u_z \\ u_{\phi} \\ u_{\theta} \\ u_{\psi} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} P \\ M_{\phi} \\ M_{\theta} \\ M_{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_p & k_p & k_p & k_p \\ 0 & -lk_p & 0 & lk_p \\ -lk_p & 0 & lk_p & 0 \\ k_{\tau} & -k_{\tau} & k_{\tau} & -k_{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix},$$

где  $k_p, k_d$  – коэффициент тяги и моментный коэффициент соответственно;  $l$  – одинаковое расстояние между центром масс и осями винтов.

## Постановка задачи синтеза следящего управления движением КК

Сформулируем следующую задачу синтеза следящего управления КК: для управляемого беспилотника с уравнениями динамики (1), (2) требуется синтезировать управляющий вектор  $\mathbf{u} = (u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T$ , обеспечивающий в процессе полета отслеживание вектором выходных управляемых переменных  $\mathbf{y} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi)^T$  вектора его заданного, программного изменения  $\mathbf{y}_d(t) = (x_d(t), y_d(t), z_d(t), \varphi_d(t), \theta_d(t), \psi_d(t))^T$ , т.е. выполнение следующего целевого условия следящего управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0, \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t). \quad (3)$$

Следует отметить, что КК как объект управления, в силу «прямоугольности» его многомерной модели (число входов  $r = 4$  не равно числу выходов  $m = 6$ ), является *функционально неуправляемым* [13, п. 3.2], т.е. лишь четырем из шести управляемым переменным можно навязать произвольно заданные программы. Например, это может быть переменная  $z(t)$ , определяющая изменение высоты полета КК и три переменные  $\varphi(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ , определяющие изменение его углов крена, тангажа и рыскания. При этом остальными двумя переменными  $x(t)$  и  $y(t)$  можно управлять косвенно, например, с помощью углов крена  $\varphi(t)$  и тангажа  $\theta(t)$ , требуемые программные изменения которых  $\varphi_d(t)$  и  $\theta_d(t)$  могут быть вычислены по следующим формулам [14]:

$$\varphi_d = \arctg\left(\frac{\mathbf{u}_\varphi \sin(\psi_d) - \mathbf{u}_\theta \cos(\psi_d)}{\Omega}\right), \quad \theta_d = \arctg\left(\frac{\mathbf{u}_\varphi \cos(\psi_d) + \mathbf{u}_\theta \sin(\psi_d)}{\Omega}\right).$$

В качестве показателей эффективности синтезированного следящего управления движением КК полагаем, во-первых, прямые показатели качества процесса управления (время регулирования и перерегулирование), характеризующие быстродействие и склонность системы к колебаниям и, во-вторых, максимальную амплитуду управляющих воздействий, характеризующую энергозатраты на их выработку [13, п. 2.4].

## Синтез алгоритма следящего управления движением КК методом МРС

Для решения поставленной задачи следящего управления движением КК воспользуемся методом МРС, использующим предсказание будущих состояний аппарата на основе его текущего состояния и прогнозирующей модели динамики для решения в реальном масштабе времени последовательности прогнозирующих задач оптимального управления с конечным временным горизонтом, аппроксимирующих решение исходной задачи управления на бесконечном временном полуинтервале. Основными достоинствами метода МРС являются его применимость для управления многомерными и многосвязными объектами со сложной структурой, включающей нелинейности и возможность явного учета ограничений, а также параметрических неопределенностей в модели объекта.

Изложим базовую классическую схему управления движением КК на основе *номинальной концепции метода* МРС [3].

Прежде всего, введем в рассмотрение прогнозирующую модель (ПМ) управляемого движения КК, в качестве которой примем исходную непрерывную

модель его динамики (1), (2). Однако, поскольку МРС-системы управления практически реализуются лишь на базе цифровых элементов, то целесообразно, используя метод Эйлера, представить ПМ движения КК в переменных состояния следующей системой векторных нелинейных разностных уравнений, сведенных к рекурсивной форме:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где  $i$  – номер такта (дискретное время); векторы  $\mathbf{x}_i \in R^n$ ,  $\mathbf{u}_i \in U \subset R^r$  и  $\mathbf{y}_i \in R^m$  – текущие состояние, управляющая и управляемая переменные модели соответственно,  $U$  – область допустимых управлений, образованная ресурсными ограничениями вида

$$U = \{ \mathbf{u}_i \in R^r : \mathbf{u}_{i\min} \leq \mathbf{u}_i \leq \mathbf{u}_{i\max}, \forall i \}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{u}_{i\min}, \mathbf{u}_{i\max}$  – заданные крайние значения управляющей переменной;  $\mathbf{F} : R^n \times U \rightarrow R^n$  – нелинейная вектор-функция, определяющая динамические свойства ПМ.

Полагаем, что целью следящего управления движением КК по ПМ (4) является обеспечение выполнения следующего равенства:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_i = 0, \mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{di}, i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $\mathbf{y}_{di}$  – заданная последовательность программного изменения вектора  $\mathbf{y}_i$ , определяющего желаемое движение аппарата. Для оценки качества процесса управления введем в рассмотрение квадратичный функционал, заданный на движениях ПМ (4):

$$J(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i, T_y, T_u) = \sum_{i=0}^{T_y} (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{di})^T \mathbf{Q}_y (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{di}) + \sum_{i=0}^{T_u} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0)^T \mathbf{Q}_u (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0), \quad (7)$$

где  $\mathbf{u}_0$  – начальный вектор управления;  $T_y$  – горизонт прогноза, т.е. число тактов, на которых строится прогноз поведения управляемой переменной  $\mathbf{y}$ ;  $T_u$  – горизонт управления, т.е. длина последовательности будущих значений управляющего воздействия  $\mathbf{u}$  причем, следуя стандартному методу МРС, полагаем, что  $T_u = T_y$ ;  $\mathbf{Q}_y \in R^{m \times m}$  и  $\mathbf{Q}_u \in R^{r \times r}$  – весовые положительно определенные матрицы, характеризующие соответственно точность управления и энергозатраты на управление.

Решение исходной задачи стабилизирующего управления движением КК на основе метода МРС заключается в использовании ПМ аппарата для прогнозирования и оптимизации будущего его поведения. Здесь реализуется итерационная схема упреждающего управления, на каждой итерации которой решается *задачи синтеза оптимального управления* ПМ (4), обеспечивающего достижение цели управления (6) с учетом ресурсных ограничений (5) и с минимизацией критерия качества (7) по управляющим переменным. Очевидно, что данная задача оптимального управления относится к классу задач квадратичного программирования.

Таким образом, при заданном программном управлении  $\mathbf{y}_{di}$  решение разностных уравнений ПМ с текущим начальным состоянием  $\mathbf{y}_i$  дает прогноз

движения КК на некотором конечном отрезке времени  $[i+T_y]$  – горизонте прогноза  $T_y$ . Далее, синтез на основе прогноза оптимального управления ПМ на каждой итерации на отрезке  $[i+T_u]$  – горизонте управления  $T_u$  – дает последовательность оптимальных управляющих переменных  $u_i, i = 0, 1, 2, \dots, T_u$ , для всех точек горизонта прогноза  $T_y$ . При этом обеспечивается приближение управляемых переменных ПМ  $y_i$  к соответствующим заданным их значениям  $y_{di}$ . Первый элемент  $u_0$  полученной последовательности управляемых переменных подается на КК в качестве управляющего воздействия. Далее осуществляется перемещение горизонта прогноза  $T_y$  – сдвиг на один шаг вперед. Происходит переход к следующей итерации и вся итерационная процедура повторяется заново.

Приведенная схема формирования стратегии упреждающего управления движением КК, именуемая в литературе *прогнозом с удаляющимся (подвижным, скользящим) горизонтом (Receding Horizon Control)*, реализуется MPC-полетным контроллером КК с блок-схемой, представленной на рисунке 2 и содержащей два основных блока: прогнозирующую модель динамики КК и блок динамической оптимизации, включающий критерий качества процесса управления и ресурсные ограничения.

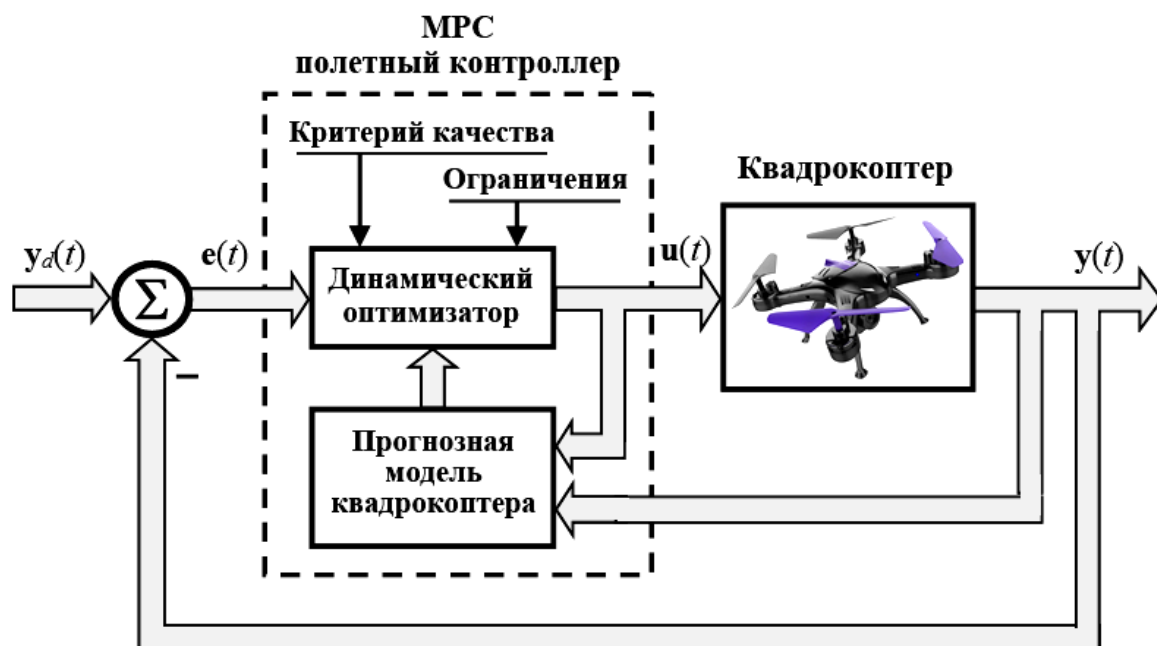


Рис. 2. Структурная схема системы автоматического управления движением КК с MPC-полетным контроллером

### Компьютерная апробация алгоритма упреждающего следящего управления движением КК

Исследование эффективности синтезированного методом MPC алгоритма упреждающего следящего управления движением КК проводилось в среде Python на модели динамики аппарата (1), (2) с параметрами, приведенными в таблице. При этом апробация синтезированного алгоритма управления проводилась в условиях априорной неопределенности математической модели динамики КК, вызванной параметрическим возмущением ее параметра – массы  $m$ .

Основными параметрами алгоритма приняты следующие:

– весовые матрицы  $Q_y$  и  $Q_u$  вида  $Q_{y_{2i,2i}} = 150e^{0,01i}$ ,

$$Q_{y_{2i+1,2i+1}} = 10^{-4} \text{ для } i = 0, \frac{N_x}{2}, Q_{u_{i,i}} = 10^4 e^{0,01i};$$

– горизонты прогноза и управления  $T_y = T_u = 10$

с шагом прогноза 200 мс.

Компьютерное моделирование производилось на разностной временной сетке с шагом в 50 мс.

Табл. Параметры математической модели динамики КК

| $m$ , кг | $I_x$ , кг·м <sup>2</sup> | $I_y$ , кг·м <sup>2</sup> | $I_z$ , кг·м <sup>2</sup> | $I$ , кг·м <sup>2</sup> | $k_p$ , Н·с <sup>2</sup> | $k_d$ , Н·м·с <sup>2</sup> |
|----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 0,65     | $7,5 \cdot 10^{-3}$       | $7,5 \cdot 10^{-3}$       | $1,3 \cdot 10^{-2}$       | $5 \cdot 10^{-5}$       | $2,98 \cdot 10^{-6}$     | $3,13 \cdot 10^{-5}$       |

| $k_x$ , Н·с/м       | $k_y$ , Н·с/м       | $k_z$ , Н·с/м     | $k_\phi$ , кг·м <sup>2</sup> /рад | $k_\theta$ , кг·м <sup>2</sup> /рад | $k_\psi$ , кг·м <sup>2</sup> /рад | $l$ , м |
|---------------------|---------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|---------|
| $7,5 \cdot 10^{-4}$ | $7,5 \cdot 10^{-4}$ | $1 \cdot 10^{-3}$ | $7,5 \cdot 10^{-4}$               | $7,5 \cdot 10^{-4}$                 | $1 \cdot 10^{-3}$                 | 0,23    |

Переходные процессы управления при отслеживании заданной двухимпульсной траектории полета КК в номинальном режиме представлены на рисунке 3. Следует отметить, что при уменьшении шага прогнозирования (например, до 100 мс.) качество переходных процессов существенно улучшается.

Анализ параметрической робастности синтезированного алгоритма стабилизирующего управления движением КК при изменении его массы на  $\pm 25\%$  и  $\pm 50\%$  представлен на рисунке 4.

Отклонения управляющей переменной от номинального значения при вариациях массы КК представлены на диаграммах на рисунках 5,а и 5,б.

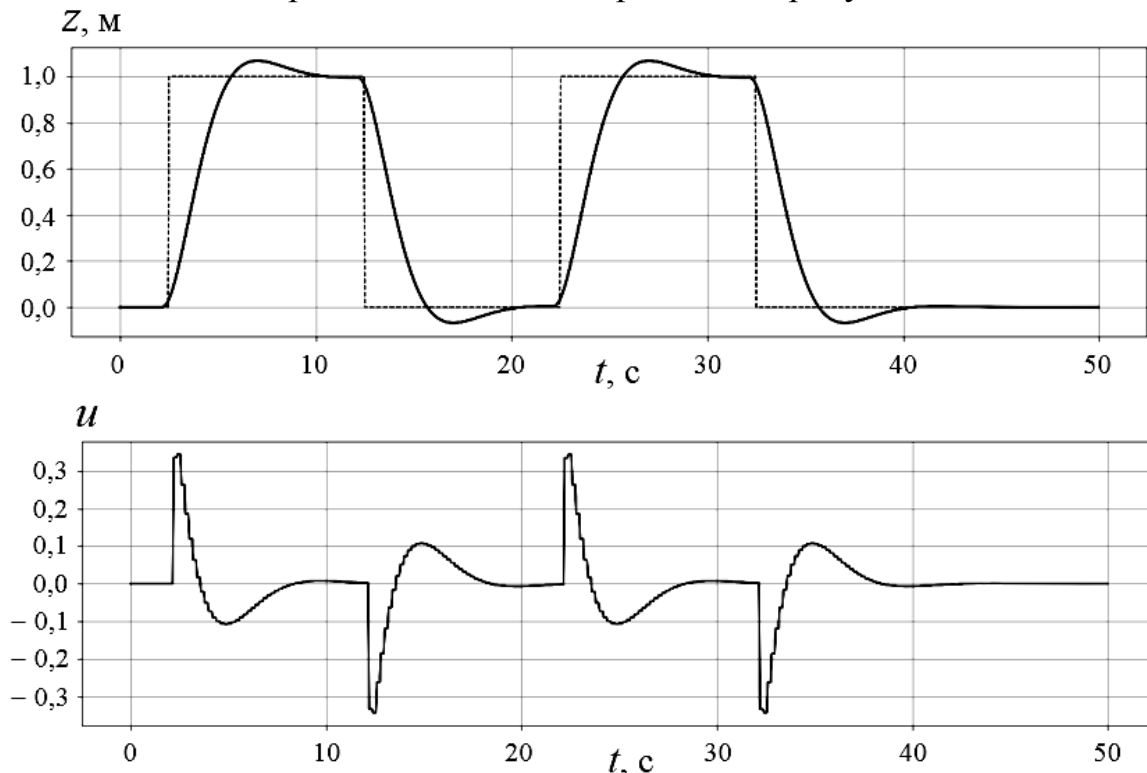


Рис. 3. Отслеживание заданной двухимпульсной траектории полета КК в номинальном режиме

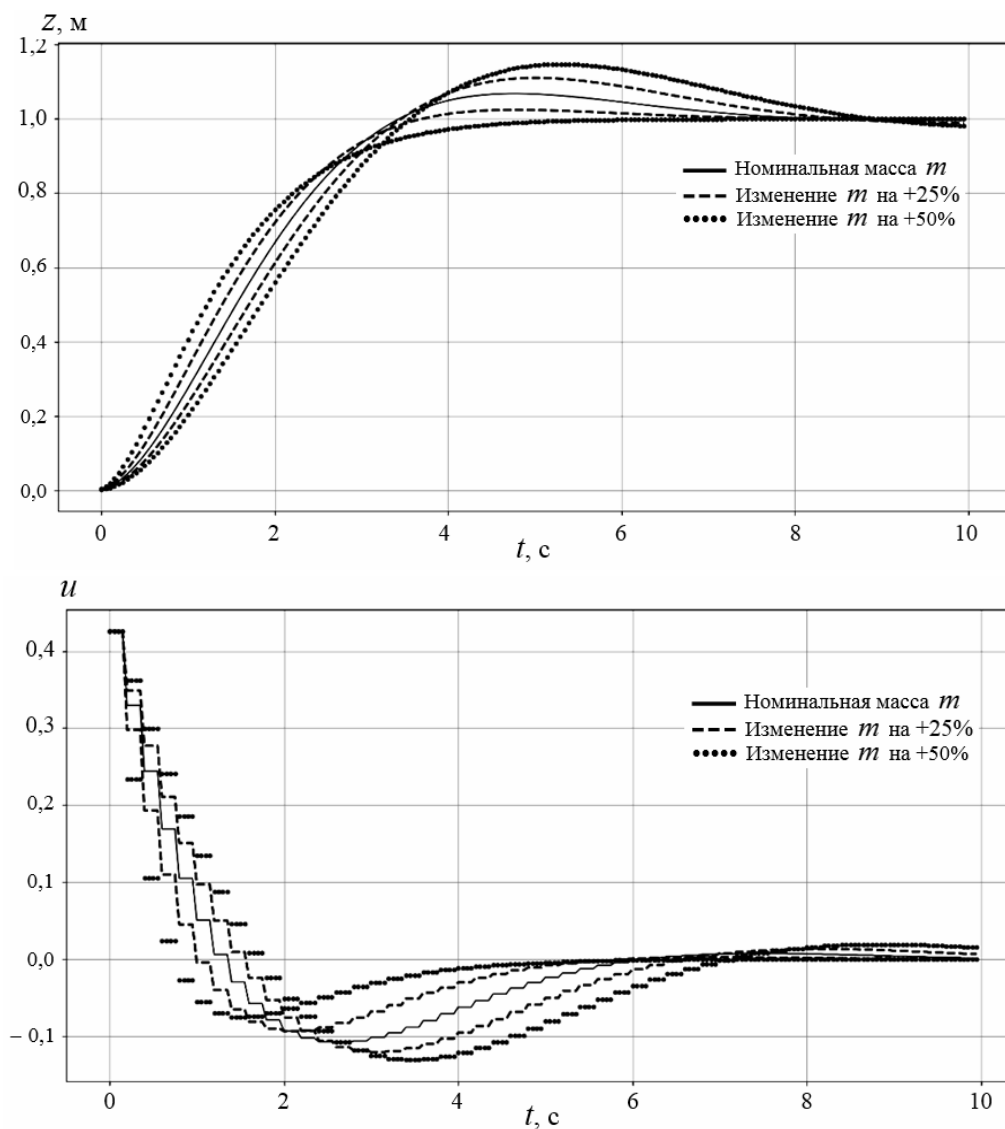


Рис. 4. Анализ параметрической робастности алгоритма

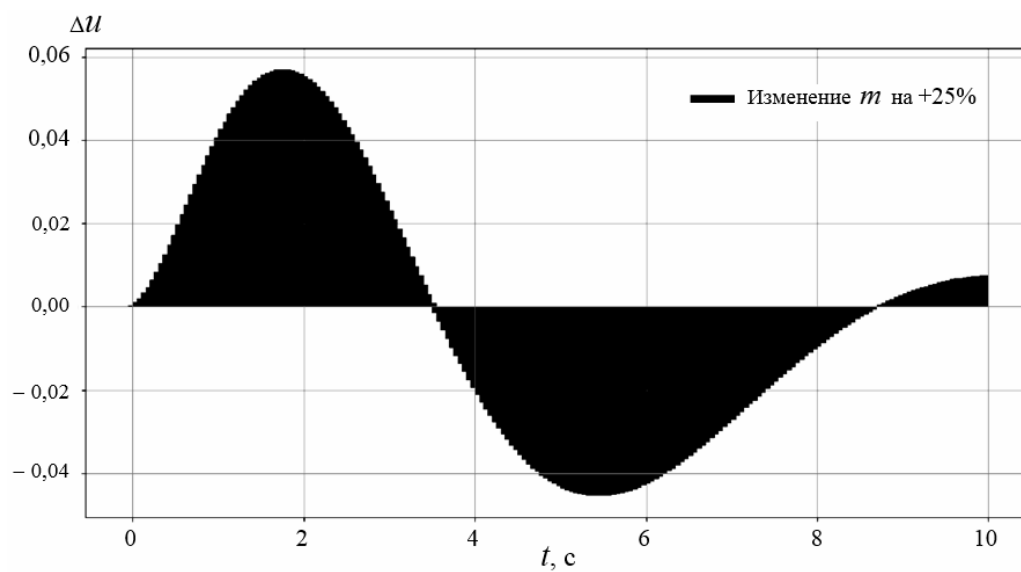


Рис. 5.а. Отклонения управления при вариациях массы КК на 25%

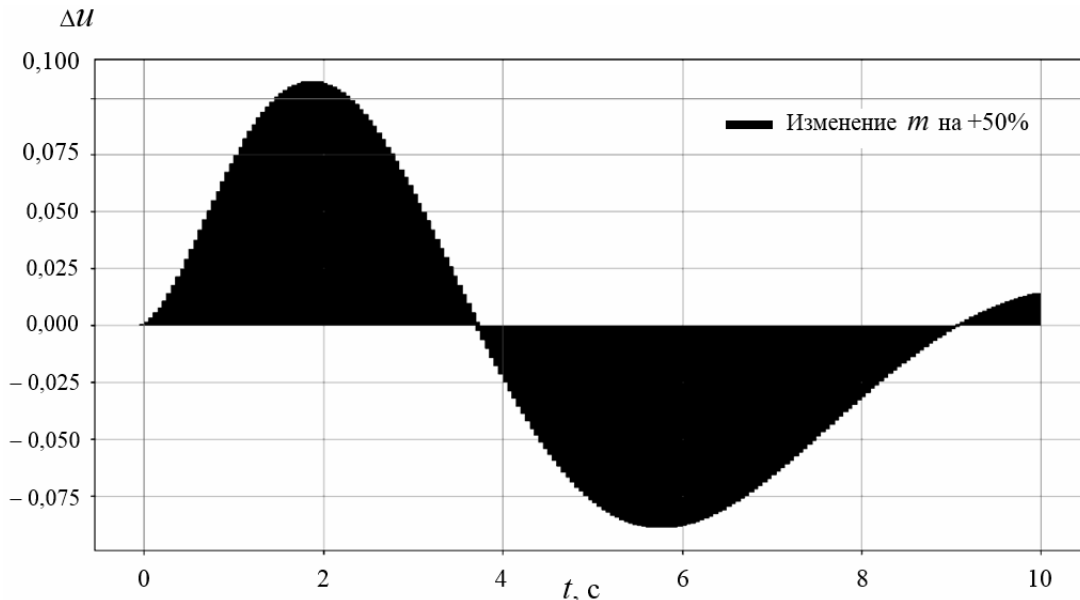


Рис. 5.б. Отклонения управления при вариациях массы КК на 50%

Итак, компьютерная апробация синтезированного на основе метода MPC алгоритма упреждающего следящего управления движением КК показала высокие робастные качества и энергоэффективность процесса управления, а также простоту разработки и исследования алгоритма.

#### Список источников

1. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Управление с прогнозирующими моделями: учебное пособие. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. – 214 с.
2. Camacho E.F., Bordons C. Model Predictive Control. – London: Springer-Verlag. 2004. – 405 p.
3. Allgower F., Zheng A., editors. Nonlinear Model Predictive Control. – Basel: Springer Basei AG. 2012. – 472 p.
4. Grüne L., Pannek J. Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms. – London: Springer-Verlag, 2017. – 456 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-46024-6.
5. Rawlings J.B., Mayne D.Q., Diehl M.M. Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design. – Nob Hill Pub., Madison, 2024. – 674 p.
6. Eren U., Prach A., Koçer B.B., Raković S.V., Kayacan E., Açıkmeşe B. Model Predictive Control in Aerospace Systems: Current State and Opportunities // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017, vol. 40, no. 7, pp. 1541-1566. DOI: 10.2514/1.G002507.
7. Alexis K., Nikolakopoulos G., Tzes A. Model Predictive Quadrotor Control: Attitude, Altitude and Position Experimental Studies // IET Control Theory & Applications. 2012, vol. 6(12), pp. 1812-1827. DOI: 10.1049/iet-cta.2011.0348
8. Mueller M.W., D'Andrea R. A Model Predictive Controller for Qquadrocopter State Interception // 2013 European Control Conference (ECC), IEE. 2013, pp. 1383-1389. DOI: 10.23919/ecc.2013.6669415.
9. Zhao W., Go T.H. Quadcopter Formation Flight Control Combining MPC and Robust Feedback Linearization // Journal of the Franklin Institute. 2014, vol. 351(3), pp. 1335-1355. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2013.10.021.
10. Wang Y., Ramirez-Jaime A., Xu F., Puig V. Nonlinear Model Predictive Control with Constraint Satisfaction for a Quadcopter // J. Phys. Conf. Ser. 2017, vol. 783, 12 p. DOI: 10.1088/1742-6596/783/1/012025.
11. Garcia G.A., Kim A.R., Jackson E., Kashmiri S.S., Shukla D. Modeling and Flight Control of a Commercial Nano Quadrotor // 2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE. Miami. 2017, pp. 524-532. DOI: 10.1109/icuas.2017.7991439.

12. Нимирич Н.С., Филимонов Н.Б. Робастное следящее управление движением квадрокоптера методом «глубокой» обратной связи // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2024. – №43. – С. 42-54. – DOI: 10.26160/2474-5901-2024-43-42-54.
13. Солодовников В.В., Филимонов Н.Б. Динамическое качество систем автоматического регулирования: уч. пособие. – М.: МВТУ, 1987. – 84 с.
14. Khadija E.H., Mostafa M., Abdeljalil E., Hassan A. Neural Network and Fuzzy-logic-based Self-tuning PID Control for Quadcopter Path Tracking // Studies in Informatics and Control. 2019, vol. 28(4), pp. 401-412. DOI: 10.24846/v28i4y201904.

Сведения об авторах:

*Нимирич Николай Сергеевич* – студент;

*Филимонов Николай Борисович* – д.т.н., профессор.