

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЗА ИЗМЕНЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ В КАМЕРЕ СГОРАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ

Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А.

Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск

Ключевые слова: аэроупругость, датчик давления, упругий элемент, камера сгорания, деформация, трубопровод.

Аннотация. Исследуется математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления», предназначенной для контроля за изменением давления рабочей среды в камере сгорания двигателя. Получены уравнения, позволяющие в каждый момент времени по величине деформации чувствительного элемента датчика определять давление рабочей среды в камере сгорания двигателя. Указаны аналитические и численные методы решения соответствующих начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений, проведен численный эксперимент.

STUDY OF A MATHEMATICAL MODEL OF CONTROL SYSTEM FOR PRESSURE CHANGES IN THE ENGINE COMBUSTION CHAMBER

Velmisov P.A., Tamarova Yu.A.

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk

Keywords: aeroelasticity, pressure sensor, elastic element, combustion chamber, deformation, pipeline.

Abstract. Mathematical model of mechanical system “pipeline - pressure sensor” is studied, designed to monitor changes in the pressure of the working medium in the combustion chamber of the engine. Equations have been obtained that make it possible to determine the pressure of the working medium in the combustion chamber of the engine at each moment of time based on the magnitude of the deformation of the sensor’s sensitive element. Analytical and numerical methods for solving the corresponding initial-boundary value problems for systems of differential equations are indicated, and a numerical experiment is carried out.

Для непрерывного измерения давления газожидкостной среды и передачи его значения в системы контроля применяются датчики [1-3]. Для таких датчиков характерна работа в непосредственной близости к камере сгорания, в области высоких температур и вибраций. Для того, чтобы ослабить воздействие виброускорений и высоких температур на датчик, он соединяется с рабочей камерой сгорания двигателя с помощью трубопровода. В связи с этим, при проектировании систем измерения давления возникает проблема исследования динамики и устойчивости совместных колебаний деформируемого элемента датчика и рабочей среды в трубопроводе. Подобный анализ особенно необходим для изучения поведения системы при нестационарном режиме работы двигателя (например, при взлете или посадке самолета, при возникновении пульсирующего режима работы двигателя и т.д.). В частности, задача состоит в получении и исследовании уравнений, связывающих закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию

упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации чувствительного элемента рассчитать давление в двигателе. Данная статья продолжает исследования авторов, представленные в работах [4-9].

На рисунке 1 представлена принципиальная схема системы «трубопровод – датчик давления»: на одном конце трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) $x = 0$ задан закон изменения давления рабочей среды, на другом конце трубопровода ($x = l$) расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составной части чувствительный упругий элемент в виде пластины.

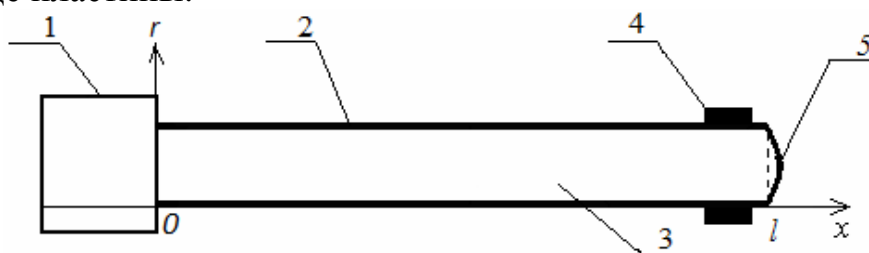


Рис.1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – рабочая среда, 4 – датчик, 5 – упругий элемент датчика

Математическая постановка задачи, соответствующая осесимметричной модели механической системы «трубопровод-датчик давления», имеет вид

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \left(\varphi_{xx} + \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right), \quad x \in (0, l), \quad r \in (0, R), \quad (1)$$

$$\varphi_r(x, R, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$\varphi_x(l, r, t) = \dot{w}(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (3)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, r, t) = P(r, t), \quad r \in (0, R), \quad (4)$$

$$L(w(r, t)) \equiv m\ddot{w} + D\nabla^4 w + N\nabla^2 w + \beta\nabla^4 \dot{w} + f(\dot{w}, w) = P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, r, t) - P_*, \quad r \in (0, R) \quad (5)$$

где $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}$, $\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}$.

В (1)-(5) $\varphi(x, r, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе; $w(r, t)$ – деформация упругого элемента, расположенного в конце трубопровода $x = l$; ρ_0 , P_0 , a_0 – плотность, давление, скорость звука, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; $P(r, t)$ – заданный закон изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; R – радиус трубопровода и упругого элемента, представляющего собой круглую деформируемую пластину; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $m = \rho_{pl} h_{pl}$ – погонная масса упругого элемента

с плотностью ρ_{pl} и толщиной h_{pl} ; $D = \frac{Eh_{pl}^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость упругого

элемента, где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона; N – сжимающее (растягивающее) элемент усилие; β – коэффициент внутреннего

демпфирования; $f(\dot{w}, w)$ – некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации $w(r, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(r, t)$; индексы x, r, t снизу обозначают частные производные по координатам x, r и времени t , точка сверху – производную по t .

Уравнение (1) описывает движение идеального газа (жидкости) в трубопроводе; (2), (3) – условия непротекания стенки $r = R$ трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (4) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (5) описывает динамику упругого элемента. Имеем связанную задачу для функций $\varphi(x, r, t)$, $w(r, t)$, которая должна быть дополнена начальными условиями. Необходимо также задать граничные условия для $w(r, t)$ при $r = R$, соответствующие типу закрепления элемента (например, $w(R, t) = w_r(R, t) = 0$ для жесткого защемления, $w(R, t) = 0$, $w_{rr}(R, t) + \nu/R w_r(R, t) = 0$ для шарнирного закрепления).

Для решения задачи (1)-(5) введем интегральные характеристики основных величин динамической системы

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int_0^R r \varphi(x, r, t) dr, & \xi(t) &= \int_0^R r w(r, t) dr, \\ G(t) &= \int_0^R r P(r, t) dr, & Q(t) &= \int_0^R r L(w(r, t)) dr. \end{aligned} \tag{6}$$

Положим в (5) $f(\dot{w}, w) = \alpha \dot{w} + \gamma w$ (α, γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи), $w(r, t) = g(r)\theta(t)$, где функция $g(r)$ удовлетворяет граничным условиям, соответствующим типу закрепления упругого элемента.

Тогда $\xi(t) = w_0 \theta(t)$, $Q(t) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t)$, где $m_0 = m \int_0^R r g(r) dr$,

$$\alpha_0 = \alpha \int_0^R r g(r) dr + \beta \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr, \quad \gamma_0 = D \int_0^R r \nabla^4 g(r) dr + N \int_0^R r \nabla^2 g(r) dr + \gamma \int_0^R r g(r) dr,$$

$$w_0 = \int_0^R r g(r) dr.$$

Интегрируя (1)-(5) по r в пределах от 0 до R , с учетом граничного условия (2), получим

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0, \tag{7}$$

$$\Phi_x(l, t) = w_0 \dot{\theta}(t), \tag{8}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t), \tag{9}$$

$$(P_0 - P_*) \frac{R^2}{2} - \rho_0 \Phi_t(l, t) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t). \tag{10}$$

Предложены и реализованы несколько способов исследования системы (7)-(10).

1. Аналитическое решение задачи приводит к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом. В этом случае общее решение уравнения (7)

записывается в виде:

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right). \quad (11)$$

где A , B – произвольные функции своих аргументов. Подставляя (11) в (8)-(10) и проводя ряд несложных математических действий, получим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее функцию $\theta(t)$, характеризующую деформацию чувствительного элемента датчика, с функцией $G(t)$, характеризующей закон изменения давления рабочей среды в двигателе

$$\begin{aligned} m_0 \left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \gamma_0 \left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \\ - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = 2 \left[G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Если $\frac{l}{a_0} = \varepsilon$ – малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/сек при температуре 0°C , а длина l не превышает нескольких метров), то, проводя в (12) разложение по степеням ε и, отставляя старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$

$$\begin{aligned} (m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left[\left(m_0 + \frac{1}{3} \rho_0 w_0 l \right) \theta^{(4)}(t) + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \dot{\theta}(t) \right] + \\ + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*) \frac{R^2}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решения линейного дифференциального уравнения (13) с постоянными коэффициентами строятся как численно, так и аналитически, в частности было проведено исследование резонансных явлений в случае пульсирующего давления в камере сгорания.

2. Численно-аналитическое исследование задачи (7)-(10) проводилось также с помощью метода Галеркина. В этом случае $\Phi(x, t)$ представляется в виде отрезков рядов по полным на интервале $(0, l)$ системам функций $\{z_m(x)\}$, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, соответствующим условиям (8), (9) или (9), (10). В результате исследование сведено к решению задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которой проведен численный эксперимент.

3. Численное исследование задачи (7)-(10) проводилось также на основе конечно – разностного метода. При этом использовалась явная схема, на основе которой проведен численный эксперимент.

Разработан программный комплекс для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» [10]. Он предназначен для исследования совместной динамики чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе, соединяющем камеру сгорания двигателя с датчиком, и позволяет получать графики функции $\theta(t)$, характеризующей деформацию упругого элемента датчика, при различном

задании механических параметров системы, в том числе при задании закона изменения давления рабочей среды в двигателе (т.е. функции $G(t)$).

Численный эксперимент для круглой пластины.

Пусть рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1,2$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 2,7 \cdot 10^3$) и имеет круглую форму (рис. 2). Параметры системы: $P_0 = 101325$, $P_* = 0$, $a_0 = 343$ (при температуре 20°C), $l = 3$, $h_{pl} = 0.0005$,

$$m = \rho_{pl} h_{pl} = 1,35, \quad D = \frac{E h_{pl}^3}{12(1-\nu^2)} = 0,825, \quad \nu = 0,34, \quad R = 0,01, \quad \alpha = 0,2, \quad \gamma = 0,3,$$

$\beta = 0,1$, $N = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

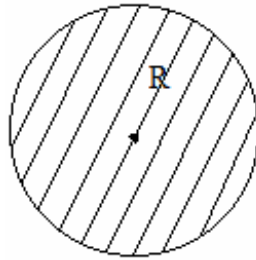


Рис. 2. Сечение трубопровода в форме круга

С помощью математической системы Mathematica численно получены решения уравнения (13) в случаях жесткого защемления и шарнирного закрепления. Начальные условия заданы в виде: $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. В случае жесткого защемления задана функция $g(r) = 1 - 3(r/R)^2 + 2(r/R)^3$. В случае шарнирного закрепления задана функция $g(r) = 1 - \frac{12+4\nu}{6+\nu}(r/R)^3 + \frac{6+3\nu}{6+\nu}(r/R)^4$. На рисунках 3-4 представлены результаты расчетов при различных заданиях закона изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $P(r, t)$.

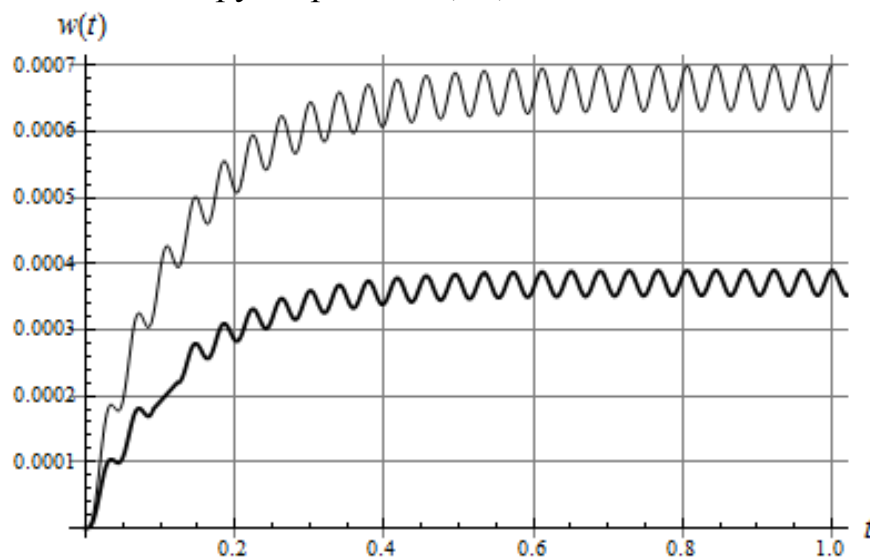


Рис. 3. Графики функции деформации упругого элемента датчика при $P(r, t) = 10^6$ (жирная линия – жесткое защемление, тонкая линия – шарнирное закрепление)

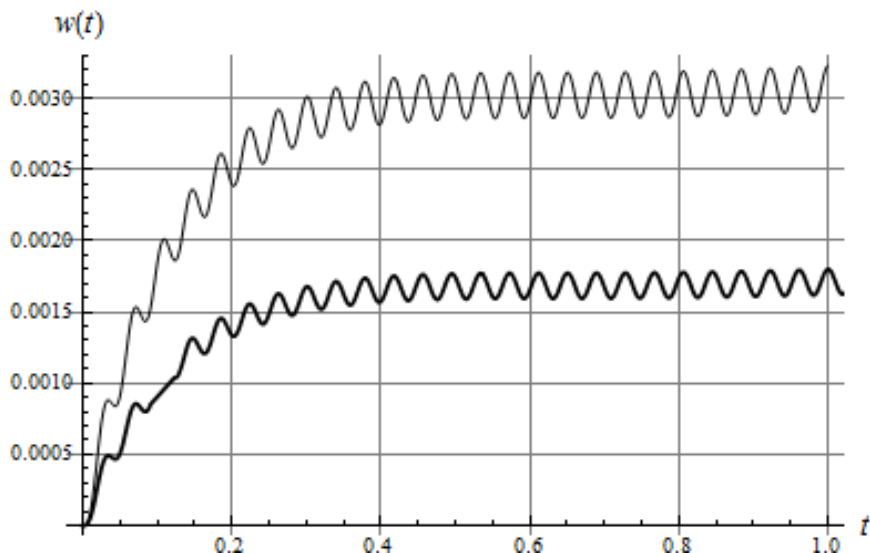


Рис. 4. Графики функции деформации упругого элемента датчика при $P(r, t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(5t)$ (жирная линия – жесткое защемление, тонкая линия – шарнирное закрепление).

Следует отметить, что решение задачи (7)-(10), построенное с помощью метода Галеркина, и решение, полученное по методу конечных разностей, достаточно точно согласуются с численным решением уравнения (13).

Численный эксперимент для пластины в виде кольца

Пусть рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1,2$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 2,7 \cdot 10^3$) и имеет форму кольца (рис. 5). Размеры сечения: $r_1 = 0,01$, $r_2 = 0,025$. Остальные параметры системы такие же, как в предыдущем примере.

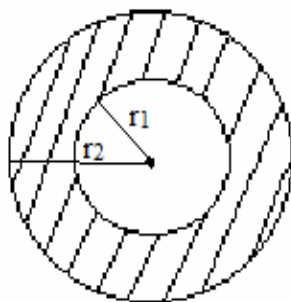


Рис. 5. Сечение трубопровода в форме кольца

Начальные условия заданы в виде: $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. Для жесткого защемления задана функция $g(r) = (r - r_1)^2 \cdot (r - r_2)^2$. На рисунках 6-7 представлены результаты расчетов при различных заданиях закона изменения избыточного давления рабочей среды на входе в трубопровод $P(r, t)$.

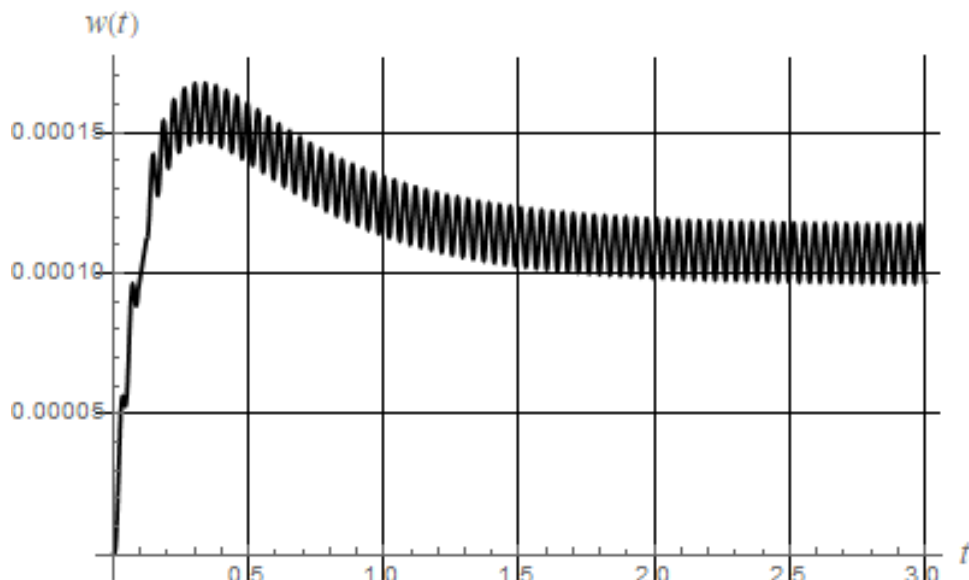


Рис. 6. График функции деформации упругого элемента датчика при $P(r,t) = 10^6(1 + e^{-5t})$, $r = 0,0075$

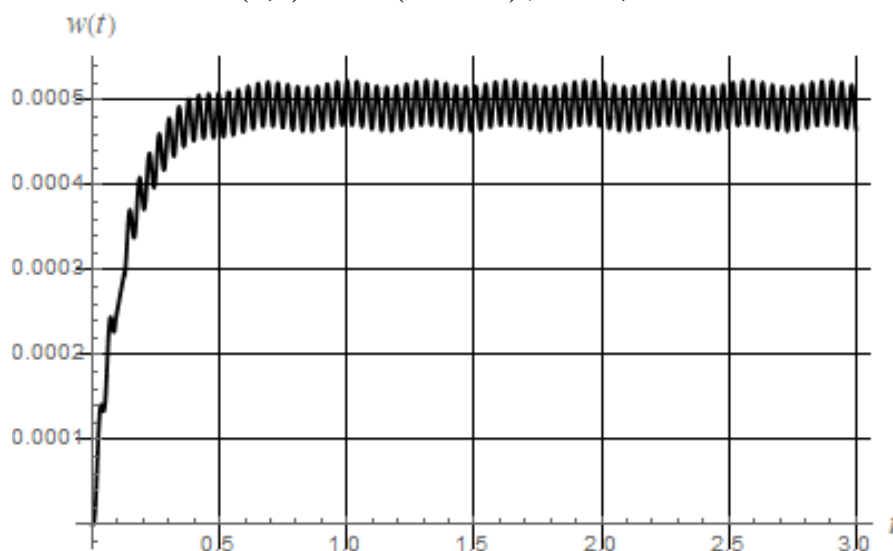


Рис. 7. График функции деформации упругого элемента датчика при $P(r,t) = 5 \cdot 10^6 + 10^5 \cos(20t)$, $r = 0,0075$

Разработанные математическая модель системы контроля за изменением давления рабочей среды в камере сгорания и соответствующий программный комплекс предназначены для математического моделирования механической системы «трубопровод-датчик давления». Они позволяют дополнить и усовершенствовать базу современного проектирования систем измерения давления в газожидкостных средах, дают возможность сократить время и средства, затрачиваемые на натурные эксперименты, и заменить их проведением компьютерных исследований.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

Список литературы

1. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж. и др. Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн. 1. Перевод с фр. А. С. Обухова. – М.: Мир, 1992. – 480 с.
2. Фрайден Дж. Современные датчики. Справочник. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.

3. Эткин Л.Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 407 с.
4. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.
5. Velmisov P., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the "Pipeline – pressure sensor" system // Journal of Physics: Conference Series. 2019, vol. 1353, p. 012085. DOI: 10.1088/1742-6596/1353/1/012085.
6. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings. 2021, vol. 2333, p. 120004. DOI: 10.1063/5.0041778.
7. Velmisov P.A., Tamarova Y.A., Pokladova Y.V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021, vol. 255(5), pp. 587-594. DOI: 10.1007/s10958-021-05395-2.
8. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 352-367.
9. Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. – 2021. – Т. 23, № 4. – С. 461-471.
10. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2022615319. Комплекс программ для математического моделирования механической системы «трубопровод – датчик давления» / Тамарова Ю.А., Вельмисов П.А., Анкилов А.В. – Заявка №2022615014 от 28.03.2022.

Сведения об авторах:

Вельмисов Петр Александрович – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Высшая математика»;

Тамарова Юлия Александровна – соискатель кафедры «Высшая математика», ведущий инженер-программист ОП НПК АО «ТЯЖМАШ».