УДК 681.513.5 https://doi.org/10.26160/2541-8637-2024-13-73-77

ПОДХОД К СИНТЕЗУ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО И МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Ловчаков В.И.
Тульский государственный университет, Тула

Ключевые слова: аналитическое конструирование оптимального регулятора, нелинейный объект, интегральное многообразие объекта, первый интеграл системы, асимптотическая устойчивость, желаемые корни системы.

Аннотация. Предложен подход (метод) решения задачи аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР) в постановке Летова–Калмана для нелинейных одноканальных объектов высокого порядка. Подход к синтезу законов обратной связи для объектов рассматриваемого класса основан на использовании известного оптимального алгоритма управления нелинейным объектом первого порядка. Для этого исходное описание объекта *n*-го порядка преобразуется к модели первого порядка с использованием так называемой синтезирующей функции от вектора состояния объекта. Допустимое множество дифференцируемых функций определяет целое множество просто вычисляемых, аналитических алгоритмов управления исходным объектом. Предлагаются способы задания синтезирующей функции, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы и ее оптимальность по соответствующему функционалу качества. Одним из перспективных способов является задание синтезирующей функций с использованием результатов модального управления.

AN APPROACH TO THE SYNTHESIS OF ALGORITHMS FOR OPTIMAL AND MODAL CONTROL OF NONLINEAR OBJECTS

Lovchakov V.I.
Tula State University, Tula

Keywords: analytical design of optimal controller, nonlinear object, integral manifold of an object, the first integral of the system, asymptotic stability, desired roots of the system.

Abstract. A approach (method) is proposed for solving the problem of analytical design of optimal controller (ADOC) in the Letov–Kalman formulation for high-order nonlinear single-channel objects. The approach to the synthesis of feedback laws for objects of the class under consideration is based on the use of a well-known optimal control algorithm for a first-order nonlinear object. To do this, the initial description of an nth-order object is converted to a first-order model using the so-called synthesizing function from the object's state vector. The admissible set of differentiable functions determines a whole set of simply calculated, analytical algorithms for controlling the original object. Methods are proposed for specifying a synthesizing function that ensures the stability of a closed-loop system and its optimality in terms of the corresponding quality functional. One of the promising methods is to specify synthesizing functions using the results of modal control.

Постановка задачи управления и исследования. Рассматриваемая задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов в постановке Летова–Калмана [1, 2] формулируется следующим образом. Имеется стационарный одноканальный объект управления, движение которого описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = A[X(t)] + B[X(t)]u(t), \qquad (1)$$

причем составляющие $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вектора состояния $X(t)$ объекта имеют смысл отклонений траектории от заданного (невозмущенного) движения. Предполагается, что компоненты функциональных векторов $A[X]$, $B[X]$ этого уравнения представляют собой непрерывные, в частности, полиномиальные зависимости. Моделью (1) описываются многие электротехнические объекты, например, электроприводы. Требуется найти управление в форме обратной связи $u(X) \equiv u(x_1, x_2, .., x_n)$, которое в совокупности с объектом (1) образует асимптотически устойчивую систему, переводящее ее из начального состояния $X(t = 0) = X_0$ в конечное нулевое состояние $X(t \to \infty) = 0$ с минимальным значением интегрального функционала

$$I = \int_0^{\infty} \left(Q\left[X(t) \right] + ru^2(t) \right) dt, \tag{2}$$

где $r > 0$ – весовой коэффициент критерия качества, $Q\left[X(t) \right]$ – положительно-определенная функция, в частности, квадратичная $Q\left[X(t) \right] = X^{\mathrm{T}}(t) Q X(t)$, где Q – симметричная положительно-определенная матрица размерности $n \times n$.

Наиболее приспособленным к решению сформулированной вариационной задачи управления является метод динамического программирования Р. Беллмана [1], в соответствии с которым оптимальное управление в задаче (1)-(2) определяется выражением

$$U = -0.5 r^{-1} B(X)^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

где функция Беллмана $S(X)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) A(X) - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial X} B(X) R^{-1} B^{\mathrm{T}}(X) \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^{\mathrm{T}} + Q(X) = 0, \tag{4}$$

известному в литературе как уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Необходимо отметить, что уравнение (4) известно более 60 лет, но общие методы его решения в настоящее время практически отсутствуют, и синтез оптимальных управлений нелинейными объектами наталкивается на серьезные математические трудности поиска численного и, тем более, аналитического решения данного уравнения. Общее решение уравнения (4) установлено только для линейных объектов управления [1, 2]. Нелинейная же задача АКОР полностью (аналитически) решена только для объекта первого порядка

$$\dot{x}(t) = a[x(t)] + b[x(t)]u(t), \tag{5}$$

для которого управление (3) принимает вид [2, 3]:

$$u(x) = -\frac{b(x)}{2r} \frac{\partial S}{\partial x} = -\left[\frac{a(x)}{b(x)} + sign(x) \sqrt{\left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)^2 + \frac{Q(x)}{r}} \right] \equiv F_0(x). \tag{6}$$

В связи с указанными обстоятельствами для решения нелинейной задачи АКОР n-го порядка (1)-(2) предлагается использовать решение (6), при необходимости и многократно. Эта идея в теории управления не является новой: в литературе для ее реализации предлагались различные подходы [4-6]. Ниже излагается новый подход использования данной идеи в решении задачи АКОР для нелинейных объектов указанного класса.

Метод синтеза регуляторов. Чтобы воспользоваться алгоритмом (6) для управления объектом (1) высокого порядка необходимо для него получить некоторым обоснованным способом модель первого порядка. С этой целью введем в рассмотрение непрерывную, дифференцируемую по своим аргументам функцию $\psi(X(t)) \equiv \psi(x_1(t),...,x_n(t))$, которую будем называть синтезирующей функцией. Рассмотрим полную производную по времени этой функции на решениях дифференциальных уравнений объекта (1):

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X(t))}{\partial x_k}\dot{x}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X)}{\partial x_k}a_k(X) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X)}{\partial x_k}b_k(X)\right)u \equiv a(X) + b(X)u. \quad (7)$$

В дальнейшем функции

$$a(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X)}{\partial x_k}a_k(X) \equiv \bar{a}(\psi), \quad b(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X)}{\partial x_k}b_k(X)\right) \equiv \bar{b}(\psi) \quad (8)$$

будем рассматривать как функции аргумента $\psi(X(t))$, предполагая, что такие функции существуют и при необходимости их возможно определить некоторым способом. Подчеркнем, что далее непосредственно функции $\bar{a}(\psi)$, $\bar{b}(\psi)$ не используются, но их существование важно для обоснования метода синтеза. На этом основании с использованием соотношений (7), (8) объекту n-го порядка (1) ставится в однозначное соответствие модель объекта 1-го порядка (5) с переменной $\psi(t) = \psi(X(t))$, которую по аналогии с работой [2] будем называть агрегированной переменной (координатой) объекта. На ее основе для управления объектом (1) предлагается использовать алгоритм обратной связи (6) в форме

$$u(X) = -\frac{\bar{a}(\psi(X))}{\bar{b}(\psi(X))} - sign(\psi(X))\sqrt{\left(\frac{\bar{a}(\psi(X))}{\bar{b}(\psi(X))}\right)^2 + \frac{\bar{Q}(\psi(X))}{r}} \equiv F_0(\psi(X)). \quad (9)$$

Подчеркнем, что можно доказать **утверждение 1:** для объекта (1) алгоритм управления (9) при $\bar{b}(\psi(X)) \neq 0$ является оптимальным по критерию (2), в котором подынтегральная функция задается как положительно определенная функция от синтезирующей функции $Q[X] = \bar{Q}[\psi(X)]$.

Необходимо отметить, что уравнение (9) определяет целое множество просто вычисляемых, аналитических алгоритмов управления объектом (1), которое задается набором функций $\psi(X)$, $\bar{Q}(\psi(X))$ и, в первую очередь, синтезирующих функций $\psi(X)$.

Возможным перспективным вариантом выбора является определение функций $\psi(X)$ из условия

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(X)}{\partial x_k} f_k(X) = 0, \quad (10)$$

при котором $\bar{a}(X) = 0$ и управление (9) принимает простой вид

$$u(X) = -\sqrt{\frac{\bar{Q}[\psi(X)]}{r}} sign[\psi(X)]. \qquad (11)$$

Условие (10) означает, что синтезирующая функция $\psi(X)$ в данном случае выбирается как первый интеграл однородных дифференциальных уравнений (1), описывающих объект управления (как его интегральное многообразие) [2]. Уравнение (10) в отличие от уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (4) является линейным дифференциальным уравнением и как в методе АКОР Красовского А.А, [2] обеспечивает существенные вычислительные преимущества предлагаемого метода синтеза. Однако данный вариант метода применим только к устойчивым объектам, для которых управление (11) обеспечивает устойчивость замкнутой системы.

Другим перспективным вариантом выбора (он применим и к неустойчивым объектам) является задание синтезирующей функций $\psi(X)$ с использованием результатов модального управления [1]. Для краткости изложения данного варианта метода синтеза ограничимся рассмотрением объектов, описываемых с использованием канонического вектора состояния $X = (x_1, x_2, .., x_n)^T = (x, \dot{x}, .., x^{(n-1)})^T$ ($x(t)$ – фазовая переменная объекта):

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, ..., n-1, \quad \dot{x}_n(t) = a_n(X) + b_n(X)u(t). \qquad (12)$$

В соответствии с рекомендациями теории модального управления выбираем характеристический полином синтезируемой замкнутой системы управления

$$G(p) = \prod_{i=1}^{n-1}(p + p_i) = p^{n-1} + g_{n-2}p^{n-2} + g_{n-3}p^{n-3} + \cdots + g_1 p + g_0, \qquad (13)$$

имеющий желаемые значения корней p_i, $i = 1, 2, ..., n$ и характеризующий соответствующими значения коэффициентов g_i. На основе уравнений (13) и (12), рассматривая переменную p как оператор дифференцирования $p = d/dt$, формируем синтезирующую функцию

$$\begin{aligned}\psi(X(t)) = G(p)x(t) = x^{(n-1)}(t) + g_{n-2}x^{(n-2)}(t) + g_{n-3}x^{(n-3)}(t) + \cdots + g_1 x^{(1)}(t) + \\ + g_0 x(t) = x_n(t) + g_{n-2}x_{n-1}(t) + g_{n-3}x_{n-2}(t) + \cdots + g_1 x_2(t) + g_0 x_1(t).\end{aligned} \qquad (14)$$

С использованием функции (14) записываем управление (9) $u(X) = F_0[\psi(X)]$, в котором

$$\frac{\bar{a}(\psi(X))}{\bar{b}(\psi(X))} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} g_{k-1}x_{k-1} + a_n(X)\right) \Big/ b_n(X). \qquad (15)$$

Отметим некоторые свойства, особенности управления $u(X) = F_0[\psi(X)]$ как объектом (12), так и объектом (1). На траекториях движения системы управления указанными объектами с обратной связью (9) можно выделить два участка: а) активный участок движения к многообразию $\psi(X) = 0$, на котором $\psi \neq 0$ и, соответственно, $u(t) \neq 0$; б) участок пассивного движения системы по многообразию $\psi(X) = 0$ при $u(t) = 0$.

Подчеркнем, что алгоритм (9) обеспечивают устойчивое движение системы управления к многообразию $\psi(X)=0$, оптимальное по критерию (2) с функцией $Q[X]=\bar{Q}[\psi(X)]$.

Далее происходит пассивное движение системы управления по данному многообразию $\psi(X)=0$. Это движение для объекта (12) описывается дифференциальным уравнением (n-1)-го порядка $\psi(X(t))=G(p)x(t)=0$ или

$$x^{(n-1)}(t)+g_{n-2}x^{(n-2)}(t)+g_{n-3}x^{(n-3)}(t)+\cdots+g_1x^{(1)}(t)+g_0x(t)=0, \quad (16)$$

которое является устойчивым согласно определению (13).

В общем случае выбор синтезирующей функции $\psi(X)$ должен обеспечивать устойчивость пассивного движения объекта (1) вдоль многообразия $\psi(X)=0$, а также возможность определения функции критерия качества в соответствии с уравнением $Q[X]=\bar{Q}[\psi(X)]$.

Список литературы

1. Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. – 736 с.
2. Современная прикладная теория управления: в 3 т. / под ред. А.А. Колесникова. – М.: ФЦ «Интеграция», Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. радиотехн. ун-та, 2000. – Т. 3.
3. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
4. Сухинин Б.В., Сурков В.В., Филимонов Н.Б. Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 7. – С. 339-348.
5. Ловчаков В.И., Лупачев А.А., Сухинин Б.В., Кретов Е.И. Синтез квазиоптимальных регуляторов для объектов одного класса // Вестник Тамбовского ГТУ. – 2014. – Т. 20, № 4. – С. 700-707.
6. Ловчаков В.И. Аналитический синтез квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов на основе условно адекватных моделей низкого порядка. Ч. 1. // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23, № 2. – С. 68-78. – DOI: 10.17587/mau.23.68-78.

Сведения об авторе:

Ловчаков Владимир Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры электротехники и электрооборудования.