

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Гукасян А.А.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: асимптотический метод, упругое тело, упругий манипулятор, кинематика.
Аннотация. Исследуется кинематика деформированного твердого тела асимптотическим методом разделения движений и на примере двухзвенного упругого манипулятора сравниваются кинематические величины, полученные с применением методов теоретической механики. В рамках линейной теории упругости результаты, полученные асимптотическим методом и методами теоретической механики, полностью совпадают, что доказывает эффективность применения как методов теоретической механики, так и асимптотических методов.

ABOUT ONE APPLICATION OF THE ASYMPTOTIC METHOD

Ghukasyan A.A.

Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: asymptotic method, solid body, elastic manipulator, kinematics.

Abstract. The kinematics of a deformed solid body is studied using the asymptotic method of separation of motions and, using the example of a two-link elastic manipulator, the kinematic quantities obtained using methods of theoretical mechanics are compared. Within the framework of the linear theory of elasticity, the results obtained by the asymptotic method and the methods of theoretical mechanics completely coincide, which proves the effectiveness of using both the methods of theoretical mechanics and asymptotic methods.

Введение. Упругое тело движется относительно основной (неподвижной) системы координат $O_oX_oY_oZ_o$ (рис. 1). Система координат $Oxyz$ неизменно связана с телом в произвольной точке O . Во время движения тело меняет свои размеры и форму, то есть деформируется и в рамках линейной теории упругости предполагается, что оно моделируется как однородная и сплошная среда [1].

Положение произвольной точки упругого тела (рис. 1) относительно неподвижной системы координат $O_oX_oY_oZ_o$ определим через компоненты некоторого вектора

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})$ ($q_i = f_i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})$ $i = 1, 2, \dots, N$).

Здесь через компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ обозначены все параметры, определяющие положение абсолютно твердого тела в пространстве, а через компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – все параметры, которые обусловлены упругостью тела.

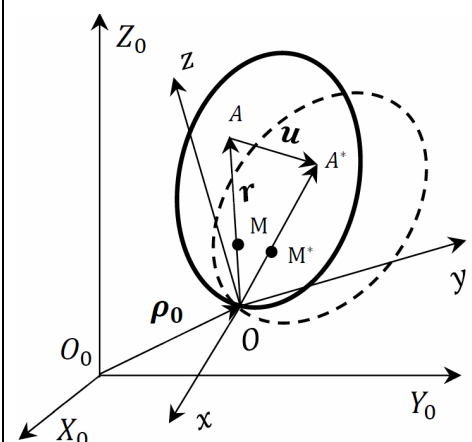


Рис. 1. Деформируемое тело

В частности $\alpha_j (j=1,2,\dots,n)$ могут быть координатами точки O (полюса), углами Эйлера или другими параметрами, зависящими от указанных величин. В качестве параметра $u_k(x, y, z, t) (k=1,2,\dots,m)$ – могут быть компоненты вектора упругих смещений или другие величины, характеризующие упругие свойства деформированного тела.

Здесь через компоненты вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ обозначены все параметры, определяющие положение абсолютно твердого тела в пространстве, а через компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – все параметры, которые обусловлены упругостью тела. В частности $\alpha_j (j=1,2,\dots,n)$ могут быть координатами точки O (полюса), углами Эйлера или другими параметрами, зависящими от указанных величин. В качестве параметра $u_k(x, y, z, t) (k=1,2,\dots,m)$ – могут быть компоненты вектора упругих смещений или другие величины, характеризующие упругие свойства деформированного тела.

1. Кинематические соотношения движений упругого тела. Кинематику упругого тела исследуем на основе (1.1), где $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ – заданная вектор-функция от вектора аргументов, структура которой зависит от выбора обобщенных координат абсолютно жесткой модели тела, от параметров упругой модели и от геометрии тела. Отметим, что в общем случае, $N \neq n \neq m$.

Матрицами частных производных вектора (1.1) являются

$$\Phi^1(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{N,n}, \Phi^2(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{u})}{\partial u_k} \right\}_{i,k=1}^{N,m}, \quad (1.2)$$

$$r_1 = \min(n, N), r_2 = \min(m, N).$$

Параметры $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$ в количестве $(n + m)$ назовем обобщенными координатами упругого тела. Для исследования основной задачи кинематики движения упругого тела предполагаем, что координаты $u_k(x, y, z, t) (k=1,2,\dots,m)$ малы, а характерная жесткость тела велика, то есть

$$u_k(x, y, z, t) : \varepsilon, \mathbf{C} : \varepsilon^{-1} (k=1,2,\dots,m), \varepsilon = 1. \quad (1.3)$$

Заметим, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ упругое тело становится абсолютно твердым.

В рамках предположений (1.3) применим асимптотический метод малого параметра [2, 3].

Формула Тейлора для (1.1) относительно $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ с точностью ε^2 будет

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z, t) + o(\varepsilon^2), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}), \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z, t), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, 0) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) можно предполагать, что поведение упругого тела в рамках принятой модели возможно описать в пределах абсолютно жесткой модели путем введения дополнительных величин $f_i^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}) (i=1,2,\dots,N)$, обусловленных упругостью тела.

1.1 Скорость движения упругого тела. Определим скорость движения упругого тела непосредственным вычислением производной по времени от функции (1.5). Производную функции $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})$ представим в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \quad (1.6)$$

или в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ скорость движения абсолютно твердого тела, а $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$ скорость движения, обусловленная упругостью ($\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0$).

Из (1.6) и (1.7) следует, что для определения полного вектора скорости движения упругого тела необходимо вычислить элементы следующих матриц $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}), \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}), \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})$ [4, 6].

1.2 Скорость движения двухзвенного упругого манипулятора асимптотическим методом. Формулы (1.7) применим для определения компонентов вектора скорости движения упругого двухзвенного манипулятора в вертикальной плоскости (Фиг.2) и сравним с формулой (4.2.4) работы [6]. В [6] компоненты вектора скорости получены методом теоретической механики.

Формулы (1.1), (1.4) и (1.5) в рассматриваемом случае будут

$$\begin{aligned} q_1 &= u_1(y, t), q_2 = l_1 \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + u_2(y, t) \cos \alpha_2 - u_3(y, t) \sin \alpha_2, \\ q_3 &= l_1 \sin \alpha_1 + y \sin \alpha_2 + u_2(y, t) \sin \alpha_2 + u_3(y, t) \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_1(\boldsymbol{\alpha}, 0) &= 0, f_2(\boldsymbol{\alpha}, 0) = l_1 \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2, f_3(\boldsymbol{\alpha}, 0) = l_1 \sin \alpha_1 + y \sin \alpha_2, \\ f_1^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) &= u_1(y, t), f_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) = u_2(y, t) \cos \alpha_2 - u_3(y, t) \sin \alpha_2, \\ f_3^*(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) &= u_2(y, t) \sin \alpha_2 + u_3(y, t) \cos \alpha_2, \\ \boldsymbol{\alpha} &= (90^\circ, \alpha_1, \alpha_2)^T, \mathbf{u} = (u_1(y, t), u_2(y, t), u_3(y, t))^T. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Компонентами $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ (1.7) движения манипулятора с абсолютно твердыми звеньями являются

$$\begin{aligned} v_{1,1} &= 0, v_{1,2} = -l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - y \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2, \\ v_{1,3} &= l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + y \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

(1.10) совпадает с выражением (4.2.4) работы [5].

Компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$, обусловленные упругостью второго звена манипулятора, имеют вид

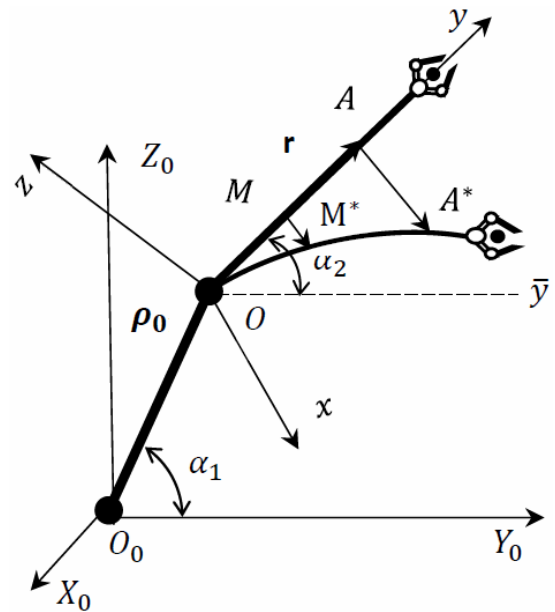


Рис. 2. Упругий манипулятор

$$\begin{aligned}
 v_{2,1} &= \dot{u}_1(y,t), v_{2,2} = -\dot{\alpha}_2 u_2(y,t) \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 u_3(y,t) \cos \alpha_2 + \\
 &+ \dot{u}_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{u}_3(y,t) \sin \alpha_2 \\
 v_{2,3} &= \dot{\alpha}_2 u_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 u_3(y,t) \sin \alpha_2 + \dot{u}_2(y,t) \sin \alpha_2 + \\
 &+ \dot{u}_3(y,t) \cos \alpha_2; \quad v_{2,i} : \mathcal{E}, \quad i=1,2,3.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Формулы (1.11) совпадают с выражениями (4.2.4) работы [6].

Окончательное выражение компонентов скорости движения упругого манипулятора (рис. 2) определяется объединением соответствующих компонентов выражений (1.10) и (1.11), то есть

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \dot{u}_1(y,t), \\
 v_2 &= -l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - y \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 u_2(y,t) \sin \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 u_3(y,t) \cos \alpha_2 + \\
 &+ \dot{u}_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{u}_3(y,t) \sin \alpha_2, \\
 v_3 &= l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + y \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_2 u_2(y,t) \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2 u_3(y,t) \sin \alpha_2 + \\
 &+ \dot{u}_2(y,t) \sin \alpha_2 + \dot{u}_3(y,t) \cos \alpha_2.
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Формулы (1.12), определяющие скорость движений упругого манипулятора, полученные разными способами, полностью совпадают. Сравнение результатов показывает эффективность применения как методов теоретической механики, так и асимптотического метода. Компоненты скорости имеют порядок $\mathcal{E}(\mathcal{E}=1)$.

2. Асимптотический метод определения ускорения движения упругого тела. Ускорение движения упругого тела (рис. 1) определим вычислением производной от скорости (1.6)

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}}. \tag{2.1}$$

Формулу (2.1), по аналогии с (1.7), представим в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}$ (2.3)

соответствует ускорению движения абсолютно твердого тела, а

$$\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.4}$$

зависит от упругих свойств тела и удовлетворяет условию $\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Для определения вектора ускорения (2.2) - (2.4) необходимо дополнительно определить элементы матриц $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}), \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}), \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})$.

2.1 Ускорение двухзвенного упругого манипулятора асимптотическим методом. В качестве приложения (2.2)-(2.4) определим ускорение движений упругого манипулятора в вертикальной плоскости $Y_0 O_0 Z_0$ (рис. 2).

Ускорения движений $\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}})$, согласно (1.8)-(1.10), определяемые по формуле (2.3), будут

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}))_1 &= 0, (\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}))_2 = -l_1 \ddot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - y \ddot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1 - y \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2, \\ (\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}))_3 &= l_1 \ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + y \ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - l_1 \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 - y \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогичное выражение можно получить формулой

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_0 + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}^2) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) \quad [5, 6].$$

По формулам (2.1), (2.4) определим ускорение $\mathbf{W}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})$ движения манипулятора, обусловленное упругостью второго звена.

Определяя слагаемые $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$ в (2.4),

для рассматриваемой модели манипулятора получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_1 &= \ddot{u}_1(y, t), \\ (\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_2 &= -u_2(y, t)\ddot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - u_3(y, t)\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \\ &\quad - u_2(y, t)\dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 + u_3(y, t)\dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 + \ddot{u}_2(y, t) \cos \alpha_2 - \\ &\quad - \ddot{u}_3(y, t) \sin \alpha_2 - 2\dot{u}_2(y, t)\dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - 2\dot{u}_3(y, t)\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2, \\ (\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_3 &= u_2(y, t)\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - u_3(y, t)\ddot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 - u_2(y, t)\dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 - \\ &\quad - u_3(y, t)\dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 + \ddot{u}_2(y, t) \sin \alpha_2 + \ddot{u}_3(y, t) \cos \alpha_2 + \\ &\quad + 2\dot{u}_2(y, t)\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - 2\dot{u}_3(y, t)\dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Все слагаемые, входящие в (2.6), имеют порядок $\varepsilon (\varepsilon=1)$.

Полный вектор ускорения движения упругого манипулятора определяется суммой соответствующих компонентов векторов (2.5) и (2.6).

Заключение. Кинематика деформированного твердого тела исследуется асимптотическим методом разделения движений. На примере двухзвенного упругого манипулятора сравниваются кинематические величины, полученные методом теоретической механики. В рамках линейной теории упругости результаты, полученные асимптотическим методом и методами теоретической механики, полностью совпадают, что доказывает эффективность применения как методов теоретической механики, так и асимптотических методов.

Список литературы

1. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 383 с.
3. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. – Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №4. – С. 101-113.
4. Гукасян А.А. Уточненные модели многозвенного манипулятора с упругими элементами и кинематический анализ движений // Доклады НАН Армении. – 2022. – Т. 122, №1. – С. 14-27.
5. Гукасян А.А. О кинематике движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – № 12. – С. 14-18.
6. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. – Ереван: Изд. НАН РА, Гитутюн, 2024. – 190 с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрезович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник.