УДК 621.38 https://doi.org/10.26160/2541-8637-2023-12-14-18

О КИНЕМАТИКЕ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО АНАЛОГИИ С КИНЕМАТИКОЙ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Гукасян А.А.
Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: деформированное твердое тело, кинематика движения, абсолютное твердое тело, методы теоретической механики, упругие перемещения.

Аннотация. Движения деформированного упругого тела исследуется по аналогии с абсолютно твердого тела известные в теоретической механике. Кинематические величины деформированного тела представлены в рамках кинематики абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью.

ON THE KINEMATICS OF MOTION OF A DEFORMED RIGID BODY BY ANALOGY WITH THE KINEMATICS OF AN ABSOLUTELY RIGID BODY

Ghukasyan A.A.
Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: deformed rigid body, kinematics of motion, absolute rigid body, methods of theoretical mechanics, elastic displacements.

Abstract. The motion of a deformed elastic body is studied by analogy with an absolutely rigid body known in theoretical mechanics. The kinematic quantities of a deformed body are presented within the framework of the kinematics of an absolutely rigid body by introducing additional quantities due to elasticity.

Введение. Исследуется движение свободного деформированного твердого тела, которое в начальном состоянии занимает некоторую область Q^1 в трехмерном евклидовом пространстве (рис. 1).

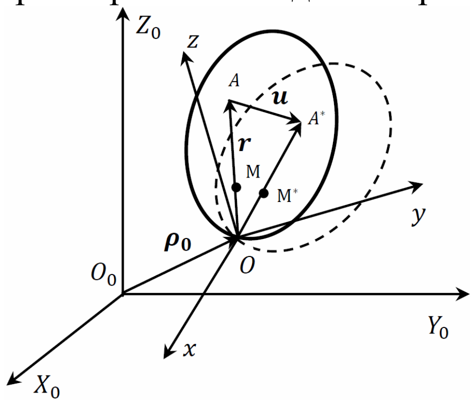

Рис. 1. Деформируемое твердое тело

Предполагается, что во время движения тело меняет свои размеры и форму, то есть деформируется, и при этом каждая точка тела Q^1 перемещается в некоторую точку области Q^2. Для рассматриваемого тела распространяется гипотеза сплошности [1, 2]. При деформации вектор перемещения точек тела считается непрерывной и дифференцируемой функцией от координат точки и времени. В рамках исследования принимается, что тело является также однородным, то есть упругие свойства одинаковы во всех точках.

Целью настоящего исследования является изучение кинематики (положения, скорость и ускорения движений точек) деформированного тела по аналогии исследования кинематики абсолютно твердого тела методами теоретической механики [3-6].

1. Относительное положение точек упругого тела. Обозначим положение произвольной точки A первоначального (недеформированного) упругого тела Q^1 относительно точки O_0 системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ радиус вектором $\boldsymbol{\rho}_A$

$$\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r} \; (\boldsymbol{\rho}_A = \begin{pmatrix} X_A, & Y_A, & Z_A \end{pmatrix}^T, \; \boldsymbol{\rho}_0 = \begin{pmatrix} X_0, & Y_0, & Z_0 \end{pmatrix}^T, \; \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix}^T). \quad (1.1)$$

Каждая точка $A(x, y, z) \in Q^1$ тела во время деформации в момент времени t получает вектор перемещения $\mathbf{u}$ с проекциями u_1, u_2, u_3 по осям Ox, Oy, Oz

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \left(u_1(x, y, z, t), \quad u_2(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, z, t)\right)^T. \quad (1.2)$$

Радиус вектор произвольной точки $A \in Q^1$ после деформации в момент времени t в системе координат $Oxyz$ определяется радиус вектором $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(x, y, z, t)$ относительно точки O. Предполагается также, что перемещения точек тела малы по сравнению с линейными размерами тела $(u_i \sim \varepsilon, \varepsilon = 1, i = 1, 2, 3)$.

Из (1.1) и (1.2) следует, что радиус вектор абсолютного положения точек упругого тела относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ определяется радиус-вектором $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_\mathbf{0} + \mathbf{r} + \mathbf{u}$, или в координатном виде

$$\begin{aligned} &X_{A^*}\mathbf{i}_0 + Y_{A^*}\mathbf{j}_0 + Z_{A^*}\mathbf{k}_0 = X_0\mathbf{i}_0 + Y_0\mathbf{j}_0 + Z_0\mathbf{k}_0 + \left(x + u_1(x, y, z, t)\right)\mathbf{i} + \\ &+ \left(y + u_2(x, y, z, t)\right)\mathbf{j} + \left(z + u_3(x, y, z, t)\right)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ единичные векторы осей подвижной системы координат $Oxyz$, а $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ – единичные векторы осей неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Умножая скалярно (1.3) последовательно на единичные векторы $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ и учитывая свойства единичных векторов ортогональных пространственных систем, получим проекции точки $A^* \in Q^2$ упругого тела относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ [7-9]

$$\begin{aligned} X_{A^*} &= X_0 + \left[x + u_1(x, y, z, t)\right]\alpha_{11} + \left[y + u_2(x, y, z, t)\right]\alpha_{12} + \left[z + u_3(x, y, z, t)\right]\alpha_{13}, \\ Y_{A^*} &= Y_0 + \left[x + u_1(x, y, z, t)\right]\alpha_{21} + \left[y + u_2(x, y, z, t)\right]\alpha_{22} + \left[z + u_3(x, y, z, t)\right]\alpha_{23}, \quad (1.4) \\ Z_{A^*} &= Z_0 + \left[x + u_1(x, y, z, t)\right]\alpha_{31} + \left[y + u_2(x, y, z, t)\right]\alpha_{32} + \left[z + u_3(x, y, z, t)\right]\alpha_{33}, \end{aligned}$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{u}), \; \boldsymbol{\Gamma} = \left\{\alpha_{ij}\right\}_{i,j=1}^{3,3}. \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ – матрица преобразования системы координат.

Аналогично, умножая (1.3) последовательно на единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, получим проекции точки $A^* \in Q^2$ в системе $Oxyz$ $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Gamma}^T\left(\boldsymbol{\rho}_{A^*} - \boldsymbol{\rho}_0\right) - \mathbf{u}(x, y, z, t)$.

Матрица преобразования $\boldsymbol{\Gamma}$ имеет следующие свойства [3, 5, 7-9]

$$\boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}; \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{\Gamma}^T \times \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E}, \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.6)$$

2. Скорость движения точек деформированного твердого тела. Абсолютную скорость точки $A^*\left(x^*, y^*, z^*\right) \in Q^2$ упругого тела представить в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2\left(x, y, z, \mathbf{u}, t\right). \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$ составляющие скорости, известные из теории движения абсолютно твердого тела [3-6]. Составляющая $\mathbf{V}_2\left(x, y, z, \mathbf{u}, t\right)$ вектора скорости в (2.1) обусловлена упругостью тела и имеет вид [8]

$$\mathbf{V}_2 = \frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(x, y, z.t\right)\right). \tag{2.2}$$

Заметим, что вектор упругих перемещений $\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)$ во время движения изменяется как по модулю, так и по направлению. Следовательно, (2.2) можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{21} + \mathbf{V}_{22}. \tag{2.3}$$

$\mathbf{V}_{21} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)$ – относительная или локальная скорость движения, а $\mathbf{V}_{22} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)$ – переносная скорость движения упругого тела.

Компоненты скорости $\mathbf{V}_{21}$ и $\mathbf{V}_{22}$ имеют порядок $\varepsilon\left(\varepsilon=1\right)$.

Итак, скорость движения произвольной точки упругого тела относительно подвижной и неподвижной системы координат имеют вид [8]

$$V_{A^*} = \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{V}_{0_0} + \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) + \frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(, y, z, t\right)\right), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)\right).$$

3. Ускорения движений точек деформированного твердого тела. Для получения формул вектора ускорения $\mathbf{W}$, нужно продифференцировать по времени выражение (2.1). Здесь также определим ускорения точек как относительно подвижной, так и относительно неподвижной систем координат и выделим те компоненты, которые обусловлены упругостью тела.

3.1 Ускорение относительно подвижной системы координат. Производную от (2.4) представим в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2. \tag{3.1}$$

где $\mathbf{W}_0 = \dfrac{d\mathbf{V}_0}{dt}$ – ускорение движения полюса O (поступательного ускорения),

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right)\right). \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(x, y, z.t\right)\right)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right) + \left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)\right) + \\ + 2\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}\left(x, y, z, t\right)\right)\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}\right) = \mathbf{W}_{TT}^{вр}$ – вращательное, $\left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right)\right) = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}\right) - \mathbf{r}\omega^2 = \mathbf{W}_{TT}^{ос}$ – осе стремительное, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – угловое ускорения твердого тела [3-6]. $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_{TT}^{вр} + \mathbf{W}_{TT}^{ос}$.

Условимся, по аналогии (3.2), $\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)$ назвать вращательным $\mathbf{W}_{УТ}^{вр}$, а $\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)\right)=\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)-\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\cdot\omega^2$ – осе стремительным $\mathbf{W}_{УТ}^{ос}$ ускорениями точек упругого тела в момент времени t. В отличие от (3.2) в (3.3) входят еще два слагаемых, которые являются результатом того, что вектор $\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)$ в течение времени изменяется как по модулю, так и по направлению. По аналогии со сложным движением абсолютно твердого тела, имеем [8]

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)=\mathbf{W}_{УТ}^{от}\ \left(\mathbf{W}_{УТ}^{от}-\text{относительное ускорение}\right).\tag{3.4}$$

$2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)$, также по аналогии со сложным движением абсолютно твердого тела носит название поворотного, или ускорения Кориолиса $\mathbf{W}_{УТ}^{ук}$.

Следовательно, ускорение точек тела, обусловленное упругостью, является

$$\mathbf{W}_2=\mathbf{W}_{УТ}^{от}+\mathbf{W}_{УТ}^{вр}+\mathbf{W}_{УТ}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{ук}.\tag{3.5}$$

Окончательное выражение ускорения движения деформированного твердого тела относительно подвижной системы координат $Oxyz$, является [8]

$$\mathbf{W}_{A^*}=\mathbf{W}_0+\mathbf{W}_{TT}^{вр}+\mathbf{W}_{TT}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{от}+\mathbf{W}_{УТ}^{вр}+\mathbf{W}_{УТ}^{ос}+\mathbf{W}_{УТ}^{ук}.\tag{3.6}$$

$$\mathbf{W}_0=\frac{d\mathbf{V}_0}{dt},\mathbf{W}_{TT}^{вр}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}\right),\mathbf{W}_{TT}^{ос}=\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}\right)-\mathbf{r}\omega^2,\mathbf{W}_{УТ}^{от}=\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right),$$
$$\mathbf{W}_{УТ}^{вр}=\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right);\ \mathbf{W}_{УТ}^{ос}=\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)-\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\cdot\omega^2,$$
$$\mathbf{W}_{УТ}^{ук}=2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)$$

(индекс ТТ – означает твердое тело, а УТ – упругое тело).

3.2 Ускорение относительно неподвижной системы координат. Продифференцируем по времени выражение (2.4) и определим ускорения движений деформированного твердого тела относительно неподвижной систем координат $O_0X_0Y_0Z_0$, с учетом свойств (1.6) матрицы преобразования $\mathbf{\Gamma}$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{A^*}=\mathbf{W}_0&+\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)+\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)+\\&+\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)\right).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Обозначим

$$\mathbf{W}_1=\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right)=\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}\right)=\mathbf{\Gamma}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}\right)-\mathbf{r}\cdot\omega^2\right)+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_2=\mathbf{\Gamma}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)&+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)+\\+2\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)&+\mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)-\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\cdot\omega^2\right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Принимая за основу обозначения для формулы (3.1)-(3.3), (3.7) принимает вид

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{\Gamma W}_0 + \mathbf{\Gamma W}_{TT}^{вр} + \mathbf{\Gamma W}_{TT}^{ос} + \mathbf{\Gamma W}_{УТ}^{от} + \mathbf{\Gamma W}_{УТ}^{вр} + \mathbf{\Gamma W}_{УТ}^{ос} + \mathbf{\Gamma W}_{УТ}^{ук}. \quad (3.9)$$

(ускорение (3.9) можно получить, также из формул (3.1) с умножением на матрицу $\mathbf{\Gamma}$).

Компоненты вектора ускорений $\mathbf{W}_{УТ}^{от}, \mathbf{W}_{УТ}^{вр}, \mathbf{W}_{УТ}^{ос}, \mathbf{W}_{УТ}^{ук}$ в (3.6) и (3.9), обусловленные упругостью тела относительно подвижной и неподвижной системы координат, имеют порядок $\varepsilon\left(\varepsilon = 1, t{:}1\right)$.

Заключение. Изучение кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой движения абсолютно твердого тела является эффективным. Кинематика упругого тела представлена в рамках движения абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью. Дополнительные слагаемые являются малыми величинами, имеющими порядок вектора упругих перемещений точек. Методы исследования и полученные результаты можно учитывать при моделировании механических систем, конструкции которых содержат упругие элементы большой жесткости. Такими механическими системами являются манипуляционные роботы, летательные аппараты и другие механизмы [10-12].

Список литературы

1. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
2. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. – М.-Л.: Тех.-теор. лит., 1947. – 465 с.
3. Вильке В.Г. Теоретическая механика. – Изд. «Лань», 2003. – 301 с.
4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – 467 с.
5. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.-Л.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1946. – 655 с.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Изд. Физ.-мат. лит., 1961. – 824 с.
7. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №4. – С. 53-64.
8. Гукасян А.А. Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела // Доклады НАН Армении. – 2023. – Т. 123, №3,4.
9. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М.: Изд. Московского ун-та, 1969. – 699 с.
10. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 363 с.
11. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и упругими звеньями // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №3. – С. 68-83.
12. Гукасян А.А. Об управляемом движении упругого космического аппарата // Известия НАН Армении. Механика. – 1995. – Т. 48, №1. – С. 55-63.

Сведения об авторе:
Гукасян Артуш Апресович – д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник.