

О МОДЕЛЯХ МНОГОЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

Гукасян А.А.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван

Ключевые слова: многозвенный манипулятор, абсолютно твердые звенья, соединительные шарниры, упругие звенья, кинематика манипулятора, криволинейные координаты.

Аннотация. Приводятся результаты математического моделирования многозвенных манипуляторов, как с абсолютно твердыми звеньями соединенными идеальными шарнирами, так и манипулятора звенья которых моделируются как упругие тела. Соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. Кинематика движения исследуется как в декартовых, так и в криволинейных координатах.

ABOUT MODELS OF MULTI-LINK MANIPULATORS

Ghukasyan A.A.

Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan

Keywords: multi-link manipulator, absolutely rigid links, connecting joints, elastic links, kinematics of the manipulator, curvilinear coordinates.

Abstract. The results of mathematical modeling of multi-link manipulators, both with absolutely rigid links connected by ideal hinges, and manipulator links of which are modeled as elastic bodies, are presented. The connecting nodes between the links contain elastic elements of high rigidity. The kinematics of motion is studied in both Cartesian and curvilinear coordinates.

Введение Представленная работа имеет обзорный характер и обобщает результаты исследований, опубликованных в [1-6]. В первой части (п. 1, 2) приводятся результаты математического моделирования многозвенных манипуляторов, как с абсолютно твердыми звеньями соединенными идеальными шарнирами, так и манипулятора звенья которых (или часть из них) моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни. Предполагается, что соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. Во второй части (п. 3), в рамках линейной теории упругости, исследуется кинематика пространственного движения манипуляторов как в декартовых, так и в криволинейной системе координат.

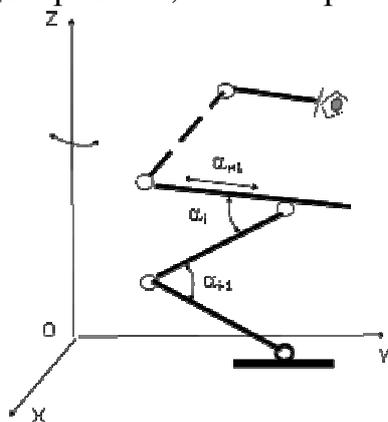


Рис. 1. Кинематический модель манипулятора

1. Идеальная модель многозвенного манипулятора. Звенья манипулятора (рис. 1) считаются абсолютно твердыми телами соединенными идеальными цилиндрическими шарнирами: α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – обобщенные координаты определяющие конфигурацию манипулятора, которые как обычно представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных относительных смещений звеньев, q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – координаты центра масс звеньев и груза, а также углы Эйлера, задающие ориентацию

схвата. Кинематику движения можно определить соотношением

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}), \text{ где } \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T. \quad (1.1)$$

Если задан $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор обобщенных координат, то вектор \mathbf{q} , определяется однозначно. Решение обратной задачи является неоднозначным, поскольку каждому состоянию захватного устройству отвечает некоторое множество конфигураций $G = \{\boldsymbol{\alpha}\}, \alpha_i \in Q_i$. Единственность решения обратной задачи может быть достигнута путем дополнительного требования к построению программного движения, например, определения оптимальной и устойчивой траектории исполнительного устройства манипулятора. Из (1.1) следует, что обобщенные скорость и ускорение движений инерционных элементов определяются соотношениями

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\dot{\boldsymbol{\alpha}}; \quad \ddot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{dt}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}$, $\frac{d\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \right\}_{i,k=1}^{m,n}$.

Будем предполагать, что матрица $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$ имеет максимальный ранг $r = \min(n, m)$.

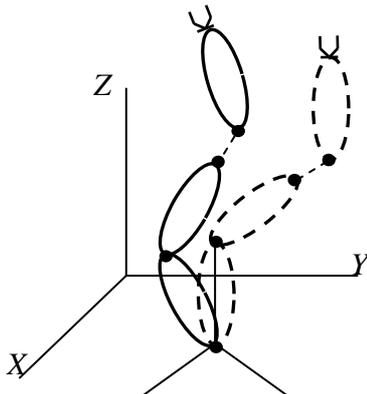


Рис. 2. Упругий манипулятор

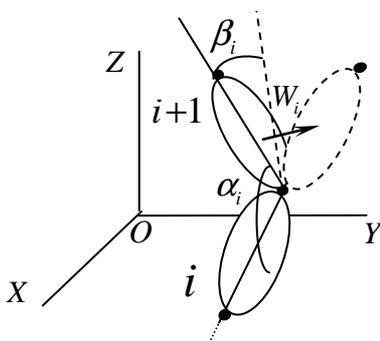


Рис. 3. Соединительный узел

2. Упругая модель многозвенного манипулятора. Предполагается, что звенья манипулятора (или часть из них) моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни, а часть соединительных узлов между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости, которые в пределе превращаются в идеальные связи (рис. 2). Через компоненты вектора

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T, \quad (m \leq n) \quad (2.1)$$

обозначим дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах (рис. 3). Обобщенные координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора, являются компоненты вектора

$$\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \dots, w_k(t, \xi))^T, \quad (2.2)$$

где ξ – произвольная точка упругого звена.

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем N координатами

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T. \quad (2.3)$$

По аналогии с (1.1), кинематику упругого манипулятора в общем случае можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \quad (2.4)$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ – заданная N -мерная вектор-функция от вектор аргументов, структура которой зависит от выбора обобщенных координат жесткой и упругой модели манипулятора, а также от геометрии манипулятора.

Для дальнейшего исследования предполагаем, что обобщенные координаты β_i малы, а жесткость c_i соединительных узлов велика, то есть [7, 8]

$$\beta_i: \varepsilon, c_i: \varepsilon^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2.5)$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, а координаты вектора $\mathbf{w}(t, \xi)$ в рамках линейной теории упругости малы по сравнению с линейными размерами упругих звеньев и удовлетворяют соотношениям

$$w_i(t, \xi): \varepsilon, w'_i(t, \xi): \varepsilon, \dot{w}_i(t, \xi): \varepsilon \quad (2.6)$$

Заметим, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а упругие звенья – абсолютно твердыми телами.

3. Кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора. В рамках линейной теории упругости приводятся результаты исследования кинематики упругих манипуляторов с применением различных систем координат.

3.1 Метод декартовых координат. В рамках предположений (2.5), (2.6) для исследования кинематики упругого манипулятора применим асимптотические методы малого параметра. Формула Тейлора для функции (2.4) относительно $\boldsymbol{\beta}$ и \mathbf{w} с точностью ε , будет [1-4]

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j + O(\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0), \quad \mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)}{\partial w_j} w_j,$$

$$\mathbf{f}^{1*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{f}^{2*}(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv 0.$$

Вычисляя производные по времени от функции (3.1), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}}$,

$$\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}}, \quad (\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0, \quad \mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0) \equiv 0),$$

$\mathbf{v}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ – определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жесткими звеньями и идеальными соединительными узлами, $\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ – дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью соединительных узлов, а $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ – зависит от упругих свойств звеньев манипулятора ($\mathbf{v}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ и $\mathbf{v}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ имеют порядок ε).

Ускорение движения характерных точек манипулятора будет

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{*1}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \quad (3.4) \\ \mathbf{w}^{*2}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0, 0) &\equiv 0, \\ \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w}) \ddot{\mathbf{w}}, \\ \mathbf{w}^{*3}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, 0, 0, 0) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Для определения компонентов векторов скорости (3.2) и ускорения (3.3) необходимо вычислить элементы матриц $\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$, $\mathbf{F}_4(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{w})$.

3.2 Метод криволинейных координат. Криволинейными координатами $s_p = s_p(q_1, q_2, q_3)$, ($p=1,2,3$) характерных точек манипулятора, с учетом (2.4), являются [5, 6]

$$s_p = s_p[f_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), f_3(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})] = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}), \quad (p=1,2,3). \quad (3.5)$$

Вектор скорости движения в криволинейной системе координат имеет вид

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w}) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})}{\partial w_l} \dot{w}_l \right] s_p^0, \quad (3.6)$$

где s_p^0 – орт оси криволинейных координат, а $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) – коэффициенты Лямэ.

В рамках принятой модели манипулятора, пользуясь разложением функций $s_p = s_p^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ ($p=1,2,3$) по формуле Тейлора относительно упругих величин β_j ($j=1,2,\dots,m$) и $w_l(t, \xi)$ ($l=1,2,\dots,k$) с точностью ε , получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{v}_3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0) \dot{\mathbf{w}}$, $\mathbf{H}_1^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, $\mathbf{H}_2^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0)$, $\mathbf{H}_3^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, \mathbf{w})$, $\mathbf{H}_4^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$, $\mathbf{H}_5^*(\boldsymbol{\alpha}, 0, 0)$ – обобщенные матрицы Лямэ, элементы которых зависят от коэффициентов Лямэ $H_p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{w})$ и от геометрической структуры манипулятора.

Здесь, также как в (3.2), скорость движения удастся представить в виде суммы трех слагаемых. Вектор ускорения \mathbf{a} в криволинейной системе координат представим в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{p=1}^3 a_p s_p^0, \quad (3.8)$$

$$\text{где } a_p = \frac{1}{H_p} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{s}_p} \frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial s_p} \frac{v^2}{2} \right\} \quad (p=1,2,3).$$

(3.8) также позволяет представить вектор ускорения в виде следующих трех слагаемых $\mathbf{a} = \mathbf{a}^1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{a}^2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \mathbf{a}^3(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$.

Заключение. Приведены математические модели многозвенных манипуляторов, как с абсолютно твердыми звеньями соединенными идеальными шарнирами, так и манипулятора звенья которых моделируются как упругие тела. Соединительные узлы между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. В рамках линейной теории упругости кинематика пространственного движения манипуляторов исследуется как в декартовых, так и в криволинейных координатах. Кинематические выражения представлены в виде суммы трех слагаемых, которые характеризуют кинематику манипулятора, как с абсолютно жесткими звеньями и идеальными соединительными узлами, так и с упругими узлами и упругими звеньями.

Список литературы

1. Гукасян А.А. О пространственном положении и деформации упругих звеньев манипулятора // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №4. – С. 53-64.
2. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями // Известия. НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №3. – С. 68-83.
3. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном // Изв. НАН Армении. Механика. – 2002. – Т. 55, №3. – С. 79-87.
4. Гукасян А.А. Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора // Доклады НАН Армении. – 2014. – Т. 114, №4. – С. 316-324.
5. Гукасян А.А. Кинематика упругого манипулятора в криволинейной системе координат // Доклады НАН Армении. – 2014. – Т. 114, №3. – С. 222-229.
6. Гукасян А.А. О двух подходах к исследованию кинематики упругих манипуляторов // Известия НАН Армении. Механика. – 2015. – Т. 68, №2. – С. 53-67.
7. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 363 с.
8. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт № 231. – М.: ИПМ им. А.Ю. Ишлинского АН СССР, 1984. – 66с.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апрегович – д.ф.-м. н., профессор, ведущий научный сотрудник.