УДК 534.01 https://doi.org/10.26160/2541-8637-2022-9-35-38

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кравчук А.С.[1], Кравчук А.И.[2]

[1]Белорусский государственный экономический университет;
[2]Белорусский государственный университет, Минск

Ключевые слова: одномерный осциллятор, вынужденные колебания, дифференциальное уравнение относительно безразмерных функций, дробная производная, проверка размерностей слагаемых дифференциального уравнения.

Аннотация. На примере вынужденных колебаний горизонтального осциллятора демонстрируется, как можно получить уравнения вынужденных колебаний в терминах безразмерных функций. Установлено, что даже для безразмерных функций уравнения динамики материальной точки в любом случае будут содержать размерные коэффициенты, также будут размерными производные по времени от безразмерных функций. В заключение отмечается, что после замены производной целого порядка на дробную в дифференциальном уравнении размерности его аддитивных частей не будут совпадать.

FRACTIONAL DERIVATIVES OF DIMENSIONLESS FUNCTIONS IN DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FORCED VIBRATIONS OF A MATERIAL POINT

Kravchuk A.S.[1], Kravchuk A.I.[2]

[1]Belarusian State Economic University;
[2]Belarusian State University, Minsk

Keywords: one-dimensional oscillator, forced oscillations, differential equation with respect to dimensionless functions, fractional derivative, checking the dimensions of the terms of a differential equation.

Abstract. Using the example of forced oscillations of a horizontal oscillator, it was demonstrated how the equations of forced oscillations can be obtained in terms of dimensionless functions. It has been established that even for dimensionless functions, the equations of dynamics of a material point in any case contain dimensional coefficients, and the time derivatives of dimensionless functions will also be dimensional. At the end, it is noted that the dimensions of additive parts of differential equation do not coincide when the derivative of an integer order is replaced by a fractional one.

Введение. В теоретической механике для получения динамических уравнений движения твердого тела обычно используются законы Ньютона, а также дифференциальная связь ускорения, скорости и перемещения выраженная в терминах производных целого порядка.

Следует отметить, что использование общепринятого подхода для получения уравнений динамики с использованием производных целого порядка [1, 2] даже в случае применения безразмерных функций предполагает использование размерных уравнений, как на этапе записи уравнения баланса сил, так и на этапе замены силы произведением массы на ускорение, определяемое производной второго порядка от перемещения.

Замена производных целого порядка на дробные [3] ничем не обоснована физически и не является теоретическим обобщением уравнений динамики материальной точки, т.к. нарушает законы Ньютона и, очевидно, приводит к решению некорректных уравнений.

Применение безразмерных функций в уравнении вынужденных колебаний горизонтального осциллятора. Рассмотрим тело массы m, расположенное на горизонтальной поверхности, по которой это тело может двигаться без трения. К корпусу прикреплена пружина с коэффициентом упругости k. Начало координат совпадает с точкой покоя тела. Если тело отклонится от положения равновесия на величину перемещения x с ускорением a, то на него будут действовать следующие силы [1, 2]:

– сила инерции (закона Ньютона: $F_{ин} = m \cdot a$);

– усилие пружины (закону Гука: $F_{упр} = -k \cdot x$);

– внешняя приложенная сила ($F(t)$).

Следовательно, получаем уравнение баланса сил в проекции на горизонтальную ось:

$$F_{ин} = F_{упр} + F(t)\,. \tag{1}$$

Подставляя значения сил в (1), получаем

$$m \cdot a + k \cdot x = F(t)\,. \tag{2}$$

Учитывая, что

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2}\,. \tag{3}$$

Можно получить известное дифференциальное уравнение

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = F(t)\,. \tag{4}$$

Будем считать, что $F(t)$ (внешняя сила) определяется косвенно через функцию заданных перемещений груза $u(t)$:

$$F(t) = m \cdot \frac{d^2 u}{dt^2}\,. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) окончательно получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{d^2 u}{dt^2}\,. \tag{6}$$

Этот пример важен с методической точки зрения, т.к. в уравнениях движения не всегда очевидно как привести рассматриваемое уравнение к виду с безразмерными функциями.

Однако в уравнениях вынужденных колебаний должна быть известна, например, максимальная амплитуда заданных перемещений $u_{\max} = \max\{u(t)\}$ на некотором интервале изменения времени [0, T]. Тогда из (6) можем получить:

$$\frac{d^2}{dt^2}\xi(t) + \frac{k}{m} \cdot \xi(t) = \frac{d^2}{dt^2} e(t)\,, \tag{7}$$

где безразмерные функции $\xi(t)$ и $e(t)$ определены следующим образом:

$$\xi(t)=\frac{x(t)}{u_{\max}},\ e(t)=\frac{u(t)}{u_{\max}}.$$

Замена обычной производной на дробную в уравнении для безразмерных функций (7). Несмотря на то, что функции $\xi(t)$ и $e(t)$ (7) безразмерны, их производные имеют размерность (1/с^2). При этом коэффициент k/m (7) также имеет ту же размерность, что и в случае свободных колебаний. Напомним, что k имеет размерность Н/м, а m – кг, поэтому размерность k/m определяется следующим равенством: $\frac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot\frac{1}{\text{кг}}=\frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}^2}\cdot\frac{1}{\text{кг}}=\frac{1}{\text{с}^2}$.

Заменим обыкновенную производную $\frac{d}{dt}$ на дробную $\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}$ (без конкретизации определения дробной производной) в уравнении (7):

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}\xi(t)+\frac{k}{m}\cdot\xi(t)=\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}e(t). \qquad (8)$$

Учитывая, что в последнем уравнении размерность члена $\frac{k}{m}\cdot\xi(t)$ равна 1/с^2. Отсюда следует, что размерности двух других членов $\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}\xi(t)$ и $\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}e(t)$ также должны быть равны 1/с^2. Это может быть тогда и только если $\alpha=1$.

Демонстрация того, что замена производных целых порядков на дробные приводит к нарушению законов Ньютона. Произведем обратные преобразования уравнения (8) с дробными производными. Помножим правую и левую части уравнения (8) на $u_{\max}$ и массу m. Получаем:

$$m\frac{d^{2\alpha}x}{dt^{2\alpha}}+k\cdot x=m\frac{d^{2\alpha}u(t)}{dt^{2\alpha}}. \qquad (9)$$

Очевидно, что при $\alpha\neq1$ единственным слагаемым в (9) имеющим размерность силы является слагаемое $k{\cdot}x$ (закон Гука). Выражения $m\frac{d^{2\alpha}x}{dt^{2\alpha}}$ и $m\frac{d^{2\alpha}u(t)}{dt^{2\alpha}}$ для любой производной дробного порядка α не имеют размерность силы, поскольку $\frac{d^{2\alpha}x}{dt^{2\alpha}}$ и $\frac{d^{2\alpha}u(t)}{dt^{2\alpha}}$ не имею размерности ускорения (м/с^2). Таким образом, нарушается второй закон Ньютона.

Кроме того, уравнение (9) с дробными производными уже не является уравнением баланса сил, т.к. как отмечалось выше уравнение (9) имеет только одно слагаемое соответствующей размерности. Таким образом, замена производных целого порядка на дробные нарушает также третий закон Ньютона.

Выводы. Применение безразмерных функций в уравнениях динамики материальной точки создает иллюзию того, что в этих уравнениях возможно произвольным образом трактовать определение производной. Возникло целое «научное» направление, в котором исследователи бездумно заменяют производные целого порядка на дробные, не обращая внимания на тот факт, что производная безразмерной функции является величиной размерной, а также на то, что в динамических уравнениях даже относительно безразмерных функций коэффициенты являются размерными величинами. Подобные «обобщения» приводят к тому, что при замене обычных производных на дробные в уравнениях динамики материальной точки нарушаются основополагающие второй и третий законы Ньютона, с помощью которых и осуществляется вывод уравнений движения. Соответственно замена обычных производных дробными лишают уравнения динамики материальной точки физического смысла и не могут применяться для решения каких-либо задач теоретической механики.

Список литературы

1. Изучение свободных и вынужденных колебаний колебательной системы с одной степенью свободы / 2 - Кафедра общей физики [Электронный ресурс]. URL: http://genphys.phys.msu.ru/rus/lab/mech/128/i2.htm
2. Лекции по механике. Ч 2. [Электронный ресурс]. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/7561/23/%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8%20%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D0%A7%202.pdf
3. Kavyanpoor M. Dynamic behaviors of a fractional order nonlinear oscillator/ M. Kavyanpoor, S. Shokrollahi // J. King Saud Univ.-Sci., V.31, № 1, 2019, pp. 14-20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2017.03.006

Сведения об авторах:

Кравчук Александр Степанович – д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры экономической информатики;

Кравчук Анжелика Ивановна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования.