УДК 629.12.03 https://doi.org/10.26160/2541-8637-2021-8-22-26

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЕ

Конева С.А., Матвеев Ю.В., Пронина А.К., Цалоев В.М.
Севастопольский государственный университет, г.Севастополь

Ключевые слова: теплообмен, электрическая машина, температура обмотки, дифференциальное уравнение, преобразование Лапласа.
Аннотация. Построена математическая модель динамики процесса теплообмена в обмотке электрической машины. Применением преобразования Лапласа получены решения в форме изображения для температуры обмотки и температуры хладагента. Выражения позволяют определить температуру для любой точки рассматриваемого пространства системы, которая описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

CONSTRUCTION OF A SOLUTION TO A PARTIAL DIFFERENTIAL PROBLEM DESCRIBING HEAT TRANSFER PROCESSES IN AN ELECTRIC MACHINE

Koneva S.A., Matveev Yu.V., Pronina A.K., Tsaloev V.M.
Sevastopol state University, Sevastopol

Keywords: heat exchange, electric machine, winding temperature, differential equation, Laplace transform.
Abstract. A mathematical model of the dynamics of the heat transfer process in the winding of an electric machine has been built. By using the Laplace transform, solutions are obtained in the form of an image for the temperature of the winding and the temperature of the refrigerant. Expressions allow you to determine the temperature for any point of the considered space of the system, which is described by differential equations in partial derivatives.

Процесс электромеханического преобразования электроэнергии сопровождается ее потерями, ведущими к нагреву элементов машины. Возникают две задачи: определение потерь $\Delta P_\theta(t)$ энергии и определение температуры $T_T(t)$ элементов машины.

В первую очередь следует говорить о нагреве ее обмоток. Материал изоляции обмоток имеют критические пределы нагрева (допустимую температуру нагрева). Небольшие превышения допустимой температуры не означает обязательного возгорания обмоток, но при этом происходит интенсивное старение изоляции и снижение срока эксплуатации машины. Температура обмотки определяется уровнем внутренних тепловыделений и температурой окружающей (охлаждающей) среды.

В данной работе обмотка рассматривается как электрическая катушка. Описание распределения температуры в таких проводниках, а также расчет максимальной температуры в тачках перегрева, представляет для расчета электрических машин большой интерес, тем более, что часто максимально допустимый ток нагрузки заранее предопределяется фиксированным значением допустимой пиковой температуры для материала обмотки. Интерес представляет определение безопасной границы тепловой перегрузки.

Длина продольной оси катушки велика по сравнению с размерами профильного поперечного сечения. Все выделяемое тепло в обмотке отводится к ее поверхности. В разрезе, нормальном к продольной оси, наблюдается следующая картина: т.к. площадь сечения каждого проводника составляет небольшой процент общей площади сечения, то процесс выделения тепла можно считать равномерным по всей площади поперечного сечения (т.е. зависит только от расстояния точки от центра сечения). В конечном счете, допустима замена катушки однородным проводником круглого сечения [4]. Исходя из этого допущения, рассматриваем распределение температуры в круглом сечении.

При данном механизме теплообмена температура охлаждающей среды при естественном либо искусственном охлаждении хладагентом (воздух, водород, вода), является функцией градиента температуры поверхности, разграничивающей обе среды (для элемента поверхности). Уравнение теплопроводности для любого сечения обмотки имеет вид:

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \mathrm{Div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, T_T) + q(r,x,t). \tag{1}$$

Уравнение теплового баланса для хладагента записывается как

$$\mathrm{c G}dT = \frac{\alpha f}{\ell}(T_{TR}(x,R,t) - T)dx. \tag{2}$$

Начальные условия принимаем нулевые, т.е.

$$T_T(x,r,0) = T(x,r,0) = 0.$$

Граничные условия:

$$-\lambda \left.\frac{\partial T_T}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha\left[T_{TR}(x,R,t) - T(x,t)\right]; \quad \left.\frac{\partial T_T(0,x,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь принято: λ – коэффициент теплопроводности материала обмотки; T_{T_R} – температура при $r=R$; c, γ, G – соответственно удельная теплоемкость, плотность и расход хладагента; α – коэффициент теплоотдачи хладагента; q – тепловой поток, f – поверхность теплообмена.

Уравнение (1) справедливо для плоской и цилиндрической геометрии, т.е.

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = q(x,..,y,t) + \lambda\left(\frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_T}{\partial y^2} + ...\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial T_T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial T_T}{\partial y} + ... \,.$$

Так как для твердого тела при $\lambda = const$ $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = W_x = 0;$ $\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} = W_y = 0,...,$ то (1) перепишется в виде

$$c_T \gamma_T \frac{\partial T_T}{\partial t} = \frac{q}{\lambda}(x,..,y,t) + \nabla^2 T_T,$$

где $\nabla^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$ – оператор Лапласа для цилиндрической геометрии. Раскрывая $\nabla^2 T_T$, получаем

$$\nabla^2 T_T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_T}{\partial \varphi^2}.$$

Для некоторого упрощения решения задачи, введем следующие предположения: распределение температуры по радиусу принимаем осесимметричное; теплопроводность обмотки и охлаждающей среды в осевом направлении потока принимаем пренебрежимо малой; наружная поверхность аппарата теплоизолирована; тепловыделение по сечению и длине обмотки принимается равномерное.

Вместо *r* и *x* вводятся безразмерные величины, $\frac{r}{R}, \frac{x}{l},$ которые меняются от 0 до 1. Для них сохраняются принятые обозначения *r*, *x* .При указанных допущениях исходные уравнения (1), (2) приводятся к виду:

$$\begin{cases} c_T \gamma_T \dfrac{\partial T_T}{\partial t} = \lambda_T \left(\dfrac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T_T}{\partial r} \right) + q(t), \\ cm \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{c}G \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\alpha f}{\ell} (T_{TR} - T) \end{cases} \tag{4}$$

при $t > 0$ и $0 \le x \le \ell;\ \ 0 \le r \le R.$

После преобразования Лапласа по переменной *t* система уравнений (4) и граничные условия запишутся в относительных величинах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T_T}{\partial r} - apT_T = -\dfrac{a_1}{p} q; \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} + (b_1 p + b_2) T = b_2 T_T(x, R, p) - b_4 G, \end{cases} \tag{5}$$

где $\quad a = \dfrac{c_T \gamma_T R^2}{\lambda_T};\ \ a_1 = \dfrac{R^2}{\lambda_T};\ b_1 = \dfrac{m}{G};\ \ \ b_2 = \dfrac{\alpha f}{cG}.$

Сделав замену $z = i\sqrt{a\mathrm{p}} \cdot r$ в первом уравнении системы (5), приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка [1]:

$$\frac{\partial^2 T_T}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial T_T}{\partial z} + T_T = \frac{a_1}{ap} q. \tag{6}$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_T(x, r, p) = C_1(x) J_0(z) + C_2(x) Y_0(z) + C_0,$$

где $J_0(z)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $Y_0(z)$ – функция Вебера нулевого порядка; $C_1(x),\ C_2(x),\ C_0$ – функции интегрирования.

Так как функция T_T должна быть ограничена при $r \to 0$, а $Y_0(\sqrt{ap} \cdot r)$ при $r \to 0$ стремится к бесконечности [2], то функция $C_2(x)$ должна равняться нулю. С учетом второго граничного условия, получим окончательное решение в форме изображения при $r=R=1$

$$T_T(x, 1, \mathrm{p}) = T_{TR} = C_1(x) I_0(\sqrt{a\mathrm{p}}) + \frac{a_1}{a\mathrm{p}} q, \tag{7}$$

где $I_0(\sqrt{ap})$- модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [3], определяемая, как $I_0(\sqrt{ap}) = J_0\left(i\sqrt{ap}\right).$ Для определения постоянной интегрирования $C_1(x)$ преобразуем второе уравнение системы (5), подставив в него второе граничное условие (3) (при r = 1). При этом получим

$$\frac{\partial T}{\partial x} + Tb_1 p = -b\left(\frac{\partial T_T}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=1} - b_4 G, \tag{8}$$

где $b = b_2 \dfrac{\lambda}{\alpha}$. Продифференцировав по r выражение (7), находим:

$$\left.\frac{\partial T_T}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{\partial T_{TR}}{\partial r} = C_1(x)\sqrt{ap}I_1\sqrt{(ap)}\ .$$

Используя первое граничное условие при r=1 с учетом выражения (2), находим:

$$T = T_T + b\frac{\partial T_T}{\partial r} = C_1(x)I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + \frac{a_1}{ap}q + bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) =$$
$$= C_1(x)\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right] + \frac{a_1}{ap}q. \tag{9}$$

Продифференцировав последнее выражение по x, получим

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dC_1}{dx}\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}\cdot I_1(\sqrt{ap})\right].$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $C_1(x)$:

$$\frac{dC_1}{dx}\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right] + C_1(x)\left[I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right]b_1 p +$$
$$= bC_1(x)\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap}) = -\frac{a_1\, b_1}{ap^2}q - b_4 G.$$

После соответствующих преобразований последнего выражения запишем:

$$\frac{dC_1}{dx} + C_1(x)\left[b_1 p + \frac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}\right] =$$
$$= -\frac{a_1 b_1 p}{apI_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})}q - \frac{b_4 G}{I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})}.$$

Решение этого неоднородного уравнения относительно q, имеет вид

$$C_1(x) = -\frac{B(p)}{A(p)} + C(p)e^{-A(p)}, \tag{10}$$

где $B(p) = \dfrac{a_1 b_1}{a\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}$; $\quad A(p(= b_1 p + \dfrac{b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}{I_0(\sqrt{ap}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})}$.

Подставляя выражение (10) в (9) и используя граничное условие при x=0, $T(0, p) = T_1(p)$, находим:

$$T_1(p) = \left[C(p) - \frac{B(p)}{A(p)}\right]\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p}) + b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right] + \frac{a_1}{ap}q.$$

Откуда

$$C(p)=\frac{T_1(p)}{\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}+\frac{B(p)}{A(p)}-\frac{a_1}{ap\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}q. \quad (11)$$

С учетом выражения (10) и (11), решение в форме изображения для температуры хладагента принимает вид:

$$T(x,p)=C_1(x)\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]+\frac{a_1}{ap}q=$$

$$=\left[-\frac{B(p)}{A(p)}+C(p)e^{-A(p)x}\right]\left[I_0(\sqrt{ap})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{ap})\right]+\frac{a_1}{ap}q=$$

$$=\frac{a_1q}{ap}\left(1-e^{-A(p)x}\right)\left[1-\frac{b_1p\left[I_0(\sqrt{ap})+b\sqrt{ap}\,I_1(\sqrt{ap})\right]ap\cdot a_1q}{a_1q\left[I_0(\sqrt{ap})+b\sqrt{ap}\,I_1(\sqrt{ap})\right]\cdot ap\cdot A(p)}\right]+T_1(pp)^{-A(p)x}.$$

Или $T(x,p)=\frac{a_1}{ap}\left[1-\frac{b_1p}{A(p)}\right]\left(1-e^{-A(p)x}\right)q+e^{-A(p)x}T_1(p)$. (12)

Для температуры обмотки:

$$T_T(x,r,p)=C_1(x)I_0(\sqrt{ap}\cdot r)+\frac{a_1}{ap}q=\left[-\frac{B(p)}{A(p)}+C(p)e^{-A(p)x}\right]I_0(\sqrt{ap}\cdot r)+\frac{a_1}{ap}q=$$

$$=\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}e^{-A(p)x}T_1(p)+\frac{a_1}{ap}\left\{\left[1-\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{\left[I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})\right]}e^{-A(p)x}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{b_1p}{A(p)}\frac{I_0(\sqrt{ap}\cdot r)}{I_0(\sqrt{a}\,\mathrm{p})+b\sqrt{ap}I_1(\sqrt{a}\,\mathrm{p})}\left[1-e^{-A(p)x}\right]\right\}q. \quad (13)$$

Выводы. Выражения (12) и (13) справедливы при $\alpha=\mathrm{const}$ и связывают переменные в любой точке рассматриваемого пространства системы, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. 6-е изд. испр. и доп. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 724 с.
2. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
3. Шевяков А.А. Управление тепловых объектов с распределенными параметрами / А.А. Шевяков, Р.В. Яковлева. – М.: Энергоатомиздат,1986. – 208 с.
4. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: 1980. – 478с.

Сведения об авторах:

Конева Светлана Андреевна – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь;

Матвеев Юрий Валентинович: – к.т.н., доцент кафедры «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь;

Пронина Анна Константиновна – старший преподаватель кафедры «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь;

Цалоев Владимир Муратович – доцент кафедры «Судовое электрооборудование», СевГУ, Севастополь.