

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2026-54-38-60>

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАТФОРМЫ ГЬЮ-СТЬЮАРТА

Яскевич А.В.

*ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С. П. Королева»,
Королев, Россия*

Ключевые слова: параллельный механизм, платформа Гью-Стьюарта, уравнения движения, рекуррентные алгоритмы моделирования, вычислительная эффективность, стыковочные механизмы космических аппаратов.

Аннотация. Параллельный механизм «платформа Гью-Стьюарта» является основой многих технических решений, в частности конструкции механизмов для стыковки космических аппаратов. Уравнения движения платформы представлены для наиболее общего случая, когда кинематические цепи, соединяющие управляемое тело с основанием, содержат универсальные и цилиндрические шарниры. Эффективность их вычислений обеспечивают предварительное выделение независимых переменных движения, рекуррентные алгоритмы синтеза уравнений динамики кинематических цепей и уравнений связей контуров, расчета сил и моментов, действующих на основание механизма, т.е. на космический аппарат.

MOTION EQUATIONS OF GOUGH-STEWART PLATFORM

Yaskevich A.V.

Rocket Space Corporation “Energia” n.a. S.P. Korolev, Korolev, Russia

Keywords: parallel mechanism, Gough-Stewart platform, motion equations, recurrent simulation algorithms, computing efficiency, spacecraft docking mechanisms.

Abstract. Parallel mechanism “Gough-Stewart platform” is a base of many technical solutions, partially of spacecraft docking mechanism design. Platform motion equations presented for most general case when kinematical chains connecting controlled body with base of mechanism include universal and cylindrical joints. Efficiency of their computation is provided by preliminary separation of independent motion coordinates, by recurrent algorithms for synthesis of dynamic equations of kinematical chains and loop constrain equations, for calculation of force and moment acting on mechanism base, i.e. on spacecraft.

Введение. Платформа Гью-Стьюарта – это параллельный механизм [1, 2], который является основой многих технических решений. Он был придуман и впервые использован для работы в составе испытательного стенда [3], а широкую популярность, особенно в аэрокосмической промышленности, приобрел после публикации [4]. В настоящее время он является основой конструкции большинства механизмов для стыковки космических аппаратов и стендов для их динамических испытаний [5-10].

Специфика проектирования процессов стыковки космических аппаратов состоит в длительности моделируемого динамического процесса (несколько минут) и необходимости оценки принимаемых технических решений на статистическом множестве вариантов (более 1000) начальных условий. Это требует применения вычислительно эффективных математических моделей движения. Минимальный объем вычислений при расчете движения платформы Гью-Стьюарта обеспечивается предварительным выделением независимых

переменных, применением наиболее эффективного рекуррентного алгоритма синтеза уравнений динамики, редукции этих уравнений на основе решения уравнений контурных связей, рекуррентным расчетом сил и моментов, действующих на основание механизма, то есть на космический аппарат. По сравнению с публикацией [11] в данной статье более подробно рассматривается модель движения только платформы Гью-Стьюарта. При этом устранены допущенные ранее неточности, добавлены необходимые комментарии.

1. Описание тел и шарниров кинематических цепей параллельного механизма. Платформа Гью-Стьюарта представляет собой параллельный механизм, в котором управляемое тело имеет шесть степеней подвижности (три поступательных и три угловых) и соединено с основанием шестью направляющими кинематическими цепями (КЦ). Каждая из этих КЦ имеет три шарнира. В наиболее общем варианте механизма два концевых из них являются универсальными, а промежуточный – цилиндрическим. Центры универсальных шарниров располагаются на периферии управляемого тела и основания. Главными достоинствами этой платформы по сравнению с другими параллельными механизмами являются достаточная симметрия рабочего пространства и хорошая нагрузочная способность, обусловленная использованием в направляющих КЦ шарниров с поступательными перемещениями, которые обеспечивают высокую эффективность управляемых приводов или демпферов.

Управляемое тело платформы и направляющие КЦ образуют кинематические контуры, в которых каждое тело имеет и предшествующее, и последующее. Для описания движения таких контуров рекуррентными кинематическими соотношениями один из их шарниров замещается уравнениями связей. Предпочтительными для замещения являются универсальные шарниры, связывающие направляющие КЦ с управляемым телом. В этом случае преобразованная механическая система (МС) распадается на семь простых КЦ – независимую ($k = 0$), связывающую управляемое тело с основанием последовательностью виртуальных шарниров, и шесть ($k = \overline{1,6}$) зависимых направляющих периферийных. Матрица обобщенной инерции такой преобразованной МС становится наименее заполненной. Это позволяет использовать высокоэффективный рекуррентный алгоритм синтеза уравнений динамики и уменьшить объем вычислений при моделировании.

Возможность предварительного выделения переменных движения управляемого тела в качестве независимых обусловлена тем, что рабочее пространство платформы ограничено таким образом, чтобы уравнения связей, замещающих шарниры, всегда имели решение. Это решение существует, если механизм не находится в так называемой сингулярной конфигурации, когда управляемое тело лежит в одной плоскости хотя бы с одной из направляющих КЦ. Отсутствие сингулярности обеспечивается на этапе проектирования

ограничением поступательных перемещений в направляющих КЦ либо с помощью механических упоров, либо с помощью алгоритмов управления.

Для описания звеньев k – й КЦ $k = \overline{0,6}$ следующая система обозначений (рис. 1.1).

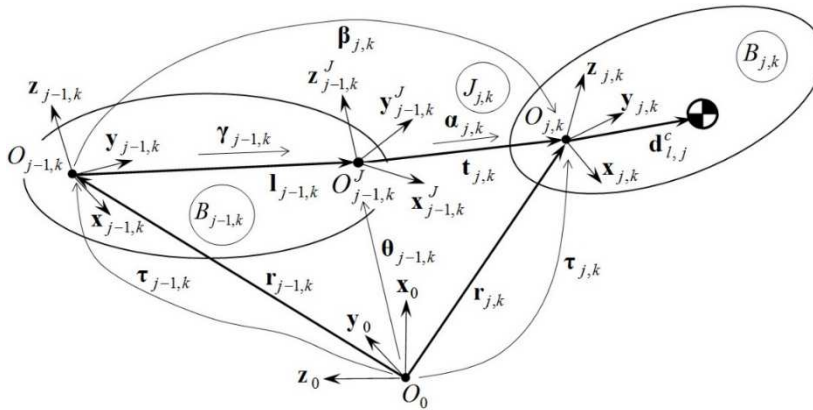


Рис. 1.1. Относительное положение и системы координат двух смежных тел кинематической цепи

С j – м шарниром связаны выходная система координат (СК) $X_{j-1,k}^J Y_{j-1,k}^J Z_{j-1,k}^J$ предшествующего тела $B_{j-1,k}$ и входная СК $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ очередного тела $B_{j,k}$. Положение $X_{j-1,k}^J Y_{j-1,k}^J Z_{j-1,k}^J$ относительно $X_{j-1,k} Y_{j-1,k} Z_{j-1,k}$ задается постоянным вектором $\mathbf{l}_{j-1,k}$ и постоянной матрицей преобразования $\gamma_{j-1,k}$. Тело $B_{j,k}$ имеет массу $m_{j,k}$ и тензор инерции $\mathbf{I}_{j,k}$. Положение центра масс относительно $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ задается постоянным вектором $\mathbf{d}_{j,k}$. Относительные поступательное и угловое перемещения в шарнире определяются переменным вектором $\mathbf{t}_{j,k}$ и переменной матрицей преобразования $\alpha_{j,k}$ из СК $X_{j-1,k}^J Y_{j-1,k}^J Z_{j-1,k}^J$ в $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$. Их элементы зависят от шарнирной переменной q_j , элемента вектора $\mathbf{q}$ обобщенных координат МС (в алгоритме составного тела рассматриваются шарниры только с одной степенью свободы). Положение СК $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ относительно $X_{j-1,k} Y_{j-1,k} Z_{j-1,k}$ определяется вектором $\mathbf{r}_{j-1,k}$ и матрицей преобразования $\beta_{j,k}$. С основанием механизма связана СК $X_0 Y_0 Z_0$. Относительно нее положение СК $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ определяется вектором $\mathbf{r}_{j,k}$ и матрицей преобразования $\tau_{j,k}$, а ориентация СК $X_{j-1,k}^J Y_{j-1,k}^J Z_{j-1,k}^J$ – матрицей преобразования $\theta_{j,k}$. Внешние активные силы $\mathbf{f}_{j,k}^E$ и моменты $\mathbf{m}_{j,k}^E$ действуют на тело $B_{j,k}$, а внутренние активные либо сила $f_{j,k}^J$, либо момент $m_{j,k}^J$ действуют относительно оси движения в шарнире $J_{j,k}$ на тела $B_{j,k}$ и $B_{j-1,k}$ (с обратным знаком).

Тела и шарниры в КЦ имеют локальную последовательную индексацию $j = \overline{1, n_k}, n_k \in \{6, 4\}$. В применяемом далее алгоритме составного тела для синтеза уравнений динамики используются шарниры с одной степенью подвижности, поступательные ($r_{j,k}^J = 0$) или вращательные ($r_{j,k}^J = 1$). Поэтому индекс каждого тела совпадает с индексом шарнирной переменной, независимой q_j или зависимой $p_{j,k}$, определяющей относительные поступательные или угловые перемещения в его входном шарнире. Независимые шарнирные переменные управляемого тела образуют (6×1) –вектор $\mathbf{q}$, зависимые шарнирные переменные k -й периферийной кинематической цепи образуют (4×1) –вектор $\mathbf{p}_k$.

Кинематический контур, образованный управляемым телом и k -й направляющей КЦ, показан на рисунке 1.2.

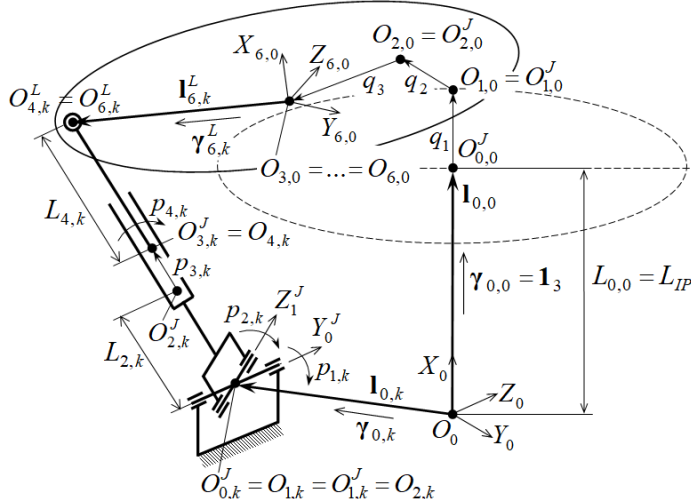


Рис. 1.2. Кинематический контур, образованный управляемым телом и k -й направляющей кинематической цепью платформы

В исходном положении механизма положение СК $X_{0,0}Y_{0,0}Z_{0,0}$, связанной с центром управляемого тела определяется постоянными вектором $\mathbf{l}_{0,0} = [L_{IP}, 0, 0]^T$ и матрицей преобразования $\gamma_{0,0} = \mathbf{1}_3$, где $\mathbf{1}_3$ – (3×3) –единичная матрица. Положение СК замещаемого шарнира относительно СК $X_{6,0}Y_{6,0}Z_{6,0}$, связанной с центром подвижного управляемого тела, задается постоянными вектором $\mathbf{l}_{6,k}^L$ и матрицей преобразования $\gamma_{6,k}^L$. Положение СК замещаемого шарнира относительно СК $X_{4,k}Y_{4,k}Z_{4,k}$ последнего шарнира k -й направляющей КЦ задается постоянными вектором $\mathbf{l}_{4,k}^L = [L_{4k}, 0, 0]^T$ и матрицей преобразования $\gamma_{4,k} = \mathbf{1}_3$.

Конфигурация независимой КЦ и положение управляемого тела относительно СК $X_{0,0}Y_{0,0}Z_{0,0}$ основания определяется следующими векторами и матрицами

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{0,0} &= [L_{IP}, 0, 0]^T, \quad \gamma_{0,0} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{1,0} = [q_1, 0, 0]^T, \quad \alpha_{1,0} = \mathbf{1}_3, \\ \mathbf{l}_{1,0} &= \mathbf{0}, \quad \gamma_{1,0} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{2,0} = [0, q_2, 0]^T, \quad \alpha_{2,0} = \mathbf{1}_3, \\ \mathbf{l}_{2,0} &= \mathbf{0}, \quad \gamma_{2,0} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{3,0} = [0, 0, q_3]^T, \quad \alpha_{3,0} = \mathbf{1}_3, \\ \mathbf{l}_{3,0} &= \mathbf{l}_{4,0} = \mathbf{l}_{5,0} = \mathbf{0}, \quad \gamma_{3,0} = \gamma_{4,0} = \gamma_{5,0} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{4,0} = \mathbf{t}_{5,0} = \mathbf{t}_{6,0} = \mathbf{0}, \\ \alpha_{4,0} &= \begin{bmatrix} cq_4 & 0 & -sq_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ sq_4 & 0 & cq_4 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{5,0} = \begin{bmatrix} cq_5 & sq_5 & 0 \\ -sq_5 & cq_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{6,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cq_6 & sq_6 \\ 0 & -sq_6 & cq_6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а конфигурация k -й направляющей КЦ векторами и матрицами

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{1,k} &= \mathbf{0}, \quad \alpha_{1,k} = \begin{bmatrix} cp_{1,k} & 0 & -sp_{1,k} \\ 0 & 1 & 0 \\ sp_{1,k} & 0 & cp_{1,k} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{l}_{1,k} &= \mathbf{0}, \quad \gamma_{1,k} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{2,k} = \mathbf{0}, \quad \alpha_{2,k} = \begin{bmatrix} cp_{2,k} & sp_{2,k} & 0 \\ -sp_{2,k} & cp_{2,k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{l}_{2,k} &= [L_{2,k}, 0, 0]^T, \quad \gamma_{2,k} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{3,k} = [p_{3,k}, 0, 0]^T, \quad \alpha_{3,k} = \mathbf{1}_3, \\ \mathbf{l}_{3,k} &= \mathbf{0}, \quad \gamma_{3,k} = \mathbf{1}_3, \quad \mathbf{t}_{4,k} = \mathbf{0}, \quad \alpha_{4,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cp_{4,k} & sp_{4,k} \\ 0 & -sp_{4,k} & cp_{4,k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Векторы $\mathbf{l}_{6,k}^L$ и $\mathbf{l}_{0,k}^L$, матрицы $\gamma_{0,k}$ определяются конструкцией конкретной платформы. В ее исходном положении матрицы преобразования из $X_0Y_0Z_0$ в СК замещаемого шарнира равны $\theta_{4,k}^L = \mathbf{1}_3 \gamma_{0,k} = \theta_{6,k}^L = \gamma_{6,k}^L \mathbf{1}_3$ и следовательно, $\gamma_{6,k}^L = \gamma_{0,k}$.

2. Формирование и решение уравнений контурных связей. Три условия замыкания k -цй кинематического контура могут быть записаны как равенство координат, скоростей и ускорений центра $O_{6,k}^L = O_{4,k}^L$ замещаемого шарнира, соединяющего направляющую КЦ с управляемым телом

$$\mathbf{r}_{6,k}^{L(0)} = \mathbf{r}_{4,k}^{L(0)}, \quad \mathbf{v}_{6,k}^{L(0)} = \mathbf{v}_{4,k}^{L(0)}, \quad \dot{\mathbf{v}}_{6,k}^{L(0)} = \dot{\mathbf{v}}_{4,k}^{L(0)}, \quad (2.1)$$

где все векторы определены в общей для всего механизма СК $X_0Y_0Z_0$ его основания, что обозначается верхним индексом в скобках.

Если в направляющих КЦ платформы второй шарнир поступательный, а замещаемый шарнир на управляемом теле сферический, то этих условий достаточно для формирования уравнений связей. Если второй шарнир цилиндрический, то замещаемый не может рассматриваться как сферический. В случае применения пневмо- или гидроцилиндров это не позволит учесть момент инерции и динамику осевого вращения поршня. Шток в виде винта должен быть описан как цилиндрический шарнир, если управляющий момент на него подается через дифференциальный шарико-винтовой преобразователь (ШВП). Этот вариант коротко рассматривается далее.

Если замещаемый шарнир универсальный, то добавляется четвертое условие замыкания $\mathbf{y}_{4,k}^L \cdot \mathbf{z}_{6,k}^L = 0$, которое отражает взаимную перпендикулярность единичных векторов $\mathbf{y}_{4,k}^L$ и $\mathbf{z}_{6,k}^L$ осей $Y_{4,k}^L$ и $Z_{6,k}^L$, относительно которых выполняются повороты на углы ψ_y и θ_z (рис. 2.1). Столбцы матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^{LT}$ и соответственно строки матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L$ составлены из единичных векторов системы координат $O_{4,k}^L X_{4,k}^L Y_{4,k}^L Z_{4,k}^L$, выраженных с СК $X_0 Y_0 Z_0$, т.е. $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L = [\mathbf{x}_{4,k}^{L(0)}, \mathbf{y}_{4,k}^{L(0)}, \mathbf{z}_{4,k}^{L(0)}]^T$. Аналогично строки матрицы $\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L$ составлены из единичных векторов системы координат $X_{6,k}^L Y_{6,k}^L Z_{6,k}^L$, выраженных с СК $X_0 Y_0 Z_0$: $\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L = [\mathbf{x}_{6,k}^{L(0)}, \mathbf{y}_{6,k}^{L(0)}, \mathbf{z}_{6,k}^{L(0)}]^T$. Поэтому четвертое условие замыкания для угловых координат имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) = \boldsymbol{\theta}_{4,k}^{LT}(2) \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) = 0, \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)$ – вторая строка матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L$, а $\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)$ – третья строка матрицы $\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L$.

Производные по времени постоянных единичных векторов $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) = \boldsymbol{\omega}_4^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{6,k}^L(3) = \boldsymbol{\omega}_6^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)$ и свойство смешанного произведения векторов $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$ позволяют определить условие замыкания для угловых скоростей

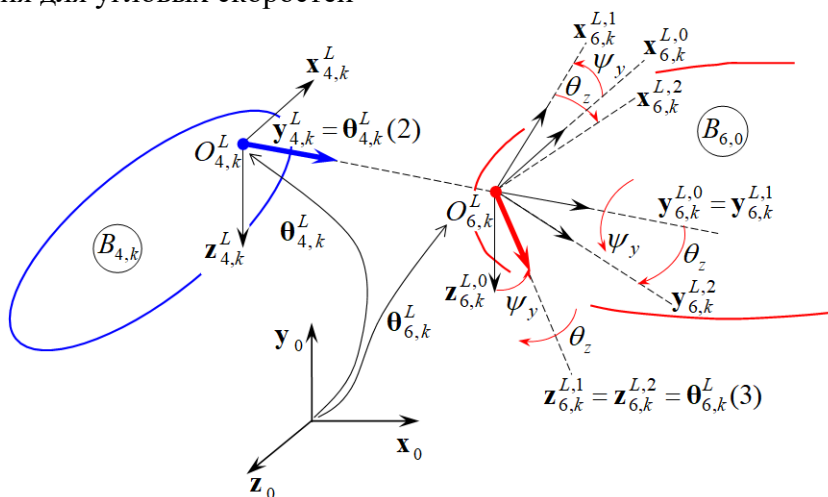


Рис. 2.1. Единичные векторы поворота в замещаемом универсальном шарнире

$$\begin{aligned}
 & [\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)]'_t = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) + \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \dot{\boldsymbol{\theta}}_{6,k}^L(3) = \\
 & = [\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)] \cdot \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) + \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot [\boldsymbol{\omega}_6^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] = \\
 & = -\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot [\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] + \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot [\boldsymbol{\omega}_6 \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] = \\
 & = -\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot [(\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] = \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \cdot [\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) \times (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)})] = \\
 & = -(\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)}) \cdot [\boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) \times \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)] = (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)}) \cdot [\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] = \\
 & = [\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)] \cdot (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)}) = 0,
 \end{aligned}$$

которое окончательно запишется в виде

$$\mathbf{n}_{R,k}^T (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)}) = 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{n}_{R,k} = \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3).$

Здесь и далее $\tilde{\mathbf{a}}$ обозначает кососимметрическую матрицу, с помощью которой записывается векторное произведение: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}.$

Условие замыкания для угловых ускорений получается дифференцированием (2.3)

$$[\mathbf{n}_{R,k}^T (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)})]'_t = \mathbf{n}_{R,k}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}_4^{(0)} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_6^{(0)}) + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^T (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_6^{(0)}) = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{n}}_{R,k} &= (\boldsymbol{\omega}_4^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) + \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \times (\boldsymbol{\omega}_6^{(0)} \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)) = \\
 &= -\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{6,k}^L(3) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_4^{(0)} \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_6^{(0)} \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)) = \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_6^{(0)} \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{6,k}^L(3) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_4^{(0)} \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)).
 \end{aligned}$$

Для преобразования условий замыкания k -го контура в уравнения контурных связей относительно шарнирных скоростей и ускорений используются матрицы парциальных скоростей управляемого тела $\mathbf{T}_{6,k}^{L(0)} = \partial \mathbf{v}_{6,k}^{L(0)} / \partial \dot{\mathbf{q}} = \partial \dot{\mathbf{v}}_{6,k}^{L(0)} / \partial \ddot{\mathbf{q}},$ $\mathbf{R}_{6,0}^{(0)} = \partial \boldsymbol{\omega}_{6,0}^{(0)} / \partial \dot{\mathbf{q}} = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{6,0}^{(0)} / \partial \ddot{\mathbf{q}}$ и звеньев направляющей КЦ $\mathbf{T}_{j,k}^{L(0)} = \partial \mathbf{v}_{j,k}^{L(0)} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k = \partial \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{L(0)} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k$ $\mathbf{R}_{j,k}^{(0)} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{(0)} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{(0)} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k.$ В результате этого уравнения связей для скоростей и ускорений в шарнирах запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T}_{4,k}^{L(0)} \dot{\mathbf{p}}_k - \mathbf{T}_{6,k}^{L(0)} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{n}_{R,k}^T (\mathbf{R}_{4,k}^{(0)} \dot{\mathbf{p}}_k - \mathbf{R}_{6,0}^{(0)} \dot{\mathbf{q}}) = 0,
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T}_{4,k}^{L(0)} \ddot{\mathbf{p}}_k + \mathbf{w}_{4,k}^{L(0)} - \mathbf{T}_{6,k}^{L(0)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{w}_{6,k}^{L(0)} = \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{n}_{R,k}^T (\mathbf{R}_{4,k}^{(0)} \ddot{\mathbf{p}}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{4,k}^{(0)} - \mathbf{R}_{6,0}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{6,0}^{(0)}) + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^T (\boldsymbol{\omega}_{4,k}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{6,0}^{(0)}) = 0,
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\mathbf{w}_{4,k}^{L(0)}, \mathbf{w}_{6,k}^{L(0)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{4,k}, \boldsymbol{\varepsilon}_{6,0} - (3 \times 1)$ – векторы, нелинейно зависящие от шарнирных скоростей.

Необходимые для получения уравнений контурных связей векторы и матрицы вычисляются рекуррентно, на основе определенных выше геометрических параметров тел и шарниров, шарнирных координат и

скоростей. Матрицы парциальных скоростей, выраженные в локальных СК шарниров независимой и зависимых КЦ, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1,0}^{rel} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{2,0}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{3,0}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_{1,0}^{rel} &= \mathbf{R}_{2,0}^{rel} = \mathbf{R}_{3,0}^{rel} = \mathbf{0}_{3 \times 6}, \quad \mathbf{T}_{4,0}^{rel} = \mathbf{T}_{5,0}^{rel} = \mathbf{T}_{6,0}^{rel} = \mathbf{0}_{3 \times 6}, \\ \mathbf{R}_{4,0}^{rel} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{5,0}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{6,0}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_{1,k}^{rel} &= \mathbf{T}_{2,k}^{rel} = \mathbf{T}_{4,k}^{rel} = \mathbf{0}_{3 \times 4}, \quad \mathbf{T}_{3,k}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_{1,k}^{rel} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{2,k}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{42,k}^{rel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При $k=0 \rightarrow j=\overline{1, 6}$ и $k=\overline{1, 6} \rightarrow j=\overline{1, 4}$, используются рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{j-1,k} &= \boldsymbol{\gamma}_{j-1,k} \boldsymbol{\tau}_{j-1,k}, \quad \boldsymbol{\beta}_{j,k} = \boldsymbol{\alpha}_{j,k} \boldsymbol{\gamma}_{j-1,k}, \quad \boldsymbol{\tau}_{j,k} = \boldsymbol{\beta}_{j,k} \boldsymbol{\tau}_{j-1,k}, \\ \mathbf{l}_{j-1,k}^{(0)} &= \boldsymbol{\tau}_{j-1,k}^T \mathbf{l}_{j-1,k}, \quad \mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)} = \mathbf{l}_{j-1,k}^{(0)} + \boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^T \mathbf{t}_{j,k}, \quad \mathbf{r}_{j,k}^{(0)} = \mathbf{r}_{j-1,k}^{(0)} + \mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)}, \\ \mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)} &= \boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^T \mathbf{T}_{j,k}^{rel}, \quad \mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)} = \boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^T \mathbf{R}_{j,k}^{rel}, \\ \mathbf{R}_{j,k}^{(0)} &= \mathbf{R}_{j-1,k}^{(0)} + \mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)}, \quad \mathbf{T}_{j,k}^{(0)} = \mathbf{T}_{j-1,k}^{(0)} - \tilde{\mathbf{l}}_{j-1,k}^{(0)} \mathbf{R}_{j-1,k}^{(0)} + \mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)} \\ k=0: \quad \mathbf{v}_{j,0}^{rel(0)} &= \mathbf{T}_{j,0}^{rel(0)} \dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}_{j,0}^{rel(0)} = \mathbf{R}_{j,0}^{rel(0)} \dot{\mathbf{q}}, \\ k>0: \quad \mathbf{v}_{j,k}^{rel(0)} &= \mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)} \dot{\mathbf{p}}_k, \quad \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)} = \mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)} \dot{\mathbf{p}}_k, \\ \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{(0)} &= \boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)}, \\ \mathbf{w}_{j,k}^{(0)} &= \mathbf{w}_{j-1,k}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)} \mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)} - 2 \tilde{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel(0)} \boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}^{(0)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1,k}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

при начальных условиях $\mathbf{r}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{l}_{0,k}^{(0)}, \quad \boldsymbol{\tau}_{0,k} = \boldsymbol{\gamma}_{0,k}, \quad \mathbf{T}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{0},$
 $\mathbf{w}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{0,k}^{(0)} = \mathbf{0}$

Для тел, соединяемых замещаемым шарниром, вычисляются матрицы и векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L &= \boldsymbol{\gamma}_{4,k} \boldsymbol{\tau}_{4,k}, \quad \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L = \boldsymbol{\gamma}_{6,k}^L \boldsymbol{\tau}_{6,0}, \\ \mathbf{l}_{4,k}^{L(0)} &= \boldsymbol{\tau}_{4,k}^T \mathbf{l}_{4,k}^L, \quad \mathbf{l}_{6,k}^{(0)} = \boldsymbol{\tau}_{6,0}^T \mathbf{l}_{6,k}^L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{4,k}^{L(0)} &= \mathbf{T}_{4,k}^{(0)} - \tilde{\mathbf{I}}_{4,k}^{L(0)} \mathbf{R}_{4,k}^{(0)}, \quad \mathbf{T}_{6,0}^{L(0)} = \mathbf{T}_{6,0}^{(0)} - \tilde{\mathbf{I}}_{6,k}^{L(0)} \mathbf{R}_{6,0}^{(0)}, \\
 \mathbf{w}_{4,k}^{(0)} &= \mathbf{w}_{3,k}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3,k}^{(0)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{3,k}^{(0)} \mathbf{l}_{4,k}^{L(0)}, \quad \mathbf{w}_{6,k}^{(0)} = \mathbf{w}_{6,0}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{6,0}^{(0)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{6,0}^{(0)} \mathbf{l}_{6,k}^{L(0)}, \\
 \mathbf{n}_{R,k} &= \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2) \times \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3), \\
 \dot{\mathbf{n}}_{R,k} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{4,k}^L(2) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_6 \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3)) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{6,k}^L(3) (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_4 \boldsymbol{\theta}_{4,k}^L(2)).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

В результате уравнения связей (2.5) для шарнирных скоростей и (2.6) для ускорений могут быть записаны в виде

$$\mathbf{C}_k^{(d)} \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{C}_k^{(i)} \dot{\mathbf{q}}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{C}_k^{(d)} \ddot{\mathbf{p}}_k + \mathbf{c}_k^{(d)} = \mathbf{C}_k^{(i)} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_k^{(i)}, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_k^{(d)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{4,k}^{L(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^T \mathbf{R}_{4,k} \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad \mathbf{C}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{6,0}^{L(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^T \mathbf{R}_{6,0} \end{bmatrix}_{4 \times 6}, \\
 \mathbf{c}_k^{(d)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{4,k}^{(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{4,k} + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^T \boldsymbol{\omega}_{4,k} \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad \mathbf{c}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{6,k}^{(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{6,0} + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^T \boldsymbol{\omega}_{6,0} \end{bmatrix}_{4 \times 1}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

В предположении отсутствия у механизма сингулярных конфигураций (4×4) –матрица $\mathbf{C}_k^{(d)}$ всегда обратима и решения уравнений связей для зависимых шарнирных скоростей и ускорений k -й КЦ имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}_k \dot{\mathbf{q}}, \tag{2.12}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)} \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} (\mathbf{c}_k^{(i)} - \mathbf{c}_k^{(d)}) = \mathbf{H}_k \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_k, \tag{2.13}$$

$$\text{где } \mathbf{H}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)}, \quad \mathbf{h}_k = [[\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} (\mathbf{c}_k^{(i)} - \mathbf{c}_k^{(d)})]_{4 \times 1}. \tag{2.14}$$

Нелинейные уравнения связей относительно шарнирных координат

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{4,k}^{L(0)} - \mathbf{r}_{6,k}^{L(0)} \\ \boldsymbol{\theta}_{4,k}^{L T}(2) \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

могут быть решены итерационным способом. В этом случае очередное i -е приближение к решению определяется соотношением

$$\mathbf{p}_k^{(i)} = \mathbf{p}_k^{(i-1)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k^{(i-1)}) \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k^{(i-1)}),$$

$$\text{где } \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k^{(i-1)}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k^{(i-1)})}{\partial \mathbf{p}_k^{(i-1)}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_k^{(i-1)})}{\partial \dot{\mathbf{p}}_k^{(i-1)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{4,k}^{L(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^T \mathbf{R}_{4,k} \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \mathbf{C}_k^{(d)}.$$

Окончательно

$$\mathbf{p}_k^{(i)} = \mathbf{p}_k^{(i-1)} - [\mathbf{C}_k^{(d)}]_{4 \times 4}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{4,k}^{L(0)} - \mathbf{r}_{6,k}^{L(0)} \\ \boldsymbol{\theta}_{4,k}^{L T}(2) \boldsymbol{\theta}_{6,k}^L(3) \end{bmatrix}_{4 \times 1}.$$

Но аналитическое решение уравнений связей для шарнирных координат требует выполнения меньшего числа операций. При этом вместо зависимых угловых шарнирных переменных вычисляются их тригонометрические функции.

Для k – й зависимой КЦ сначала вычисляется вектор

$$\mathbf{r}_{S,k}^{(0)} = \mathbf{r}_{6,0}^{(0)} + \boldsymbol{\tau}_{6,0}^T \mathbf{l}_{6,k}^L - \mathbf{l}_{0,k}^{(0)} = [l_k, m_k, n_k]^T$$

из центра первого в центр замещаемого шарнира, выраженный в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$. Его длина $L_{S,k} = \sqrt{l_k^2 + m_k^2 + n_k^2}$ позволяет определить поступательный ход штока в зависимой КЦ

$$p_{k,3} = L_{S,k} - L_{S,k}(0),$$

где $L_{S,k}(0)$ – расстояние между центрами первого и замещаемого шарниров в некотором исходном положении механизма, при котором $p_{k,3} = 0$.

Для определения $p_{k,1}$ и $p_{k,2}$ вектор $\mathbf{r}_{S,k}^{(0)}$ преобразуется в систему координат $X_{0,k}^J Y_{0,k}^J Z_{0,k}^J$, связанную с первой осью вращения первого шарнира. С учетом того, что $\gamma_{1,k} = \gamma_{2,k} = \mathbf{1}_3$

$$\mathbf{r}_{S,k}^{(k)} = \gamma_{0,k} \mathbf{r}_{S,k}^{(0)} = [l_{S,k}^{(k)}, m_{S,k}^{(k)}, n_{S,k}^{(k)}]^T = \boldsymbol{\alpha}_{1,k}^T \boldsymbol{\alpha}_{2,k}^T [L_{S,k}, 0, 0]^T.$$

Так как в универсальном шарнире первый поворот выполняется относительно оси $Y_{1,k}$, а второй – относительно $Z_{2,k}$, то при обозначениях $cp_{k,i} = \cos p_{k,i}$, $sp_{k,i} = \sin p_{k,i}$

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,k}^T \boldsymbol{\alpha}_{2,k}^T = \begin{bmatrix} cp_{k,1} & 0 & sp_{k,1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sp_{k,1} & 0 & cp_{k,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cp_{k,2} & -sp_{k,2} & 0 \\ sp_{k,2} & cp_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp_{k,1}cp_{k,2} & -cp_{k,1}sp_{k,2} & sp_{k,1} \\ sp_{k,2} & cp_{k,2} & 0 \\ -sp_{k,1}cp_{k,2} & sp_{k,1}sp_{k,2} & cp_{k,1} \end{bmatrix}$$

$$\text{и } \mathbf{r}_{S,k}^{(k)} = \begin{bmatrix} cp_{k,1}cp_{k,2} & -cp_{k,1}sp_{k,2} & sp_{k,1} \\ sp_{k,2} & cp_{k,2} & 0 \\ -sp_{k,1}cp_{k,2} & sp_{k,1}sp_{k,2} & cp_{k,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{S,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cp_{k,1}cp_{k,2}L_{S,k} \\ sp_{k,2}L_{S,k} \\ -sp_{k,1}cp_{k,2}L_{S,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{S,k}^{(k)} \\ m_{S,k}^{(k)} \\ n_{S,k}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Это позволяет определить тригонометрические функции углов $p_{k,1}$ и $p_{k,2}$

$$ctg p_{k,1} = -l_{S,k}^{(k)} / n_{S,k}^{(k)}, \quad sp_{k,1} = \text{sign}(ctg p_{k,1}) / \sqrt{1 + ctg^2 p_{k,1}},$$

$$cp_{k,1} = \sqrt{1 - sp_{k,1}^2}, \quad sp_{k,2} = m_{S,k}^{(k)} / L_{S,k}, \quad cp_{k,2} = \sqrt{1 - sp_{k,2}^2}.$$

Четвертая зависимая шарнирная переменная $p_{k,4}$ – угол поворота относительно продольной оси в цилиндрическом шарнире, определяется при записи условия замыкания для угловой координаты не в системе координат $X_0 Y_0 Z_0$ основания, а в локальной системе $X_{3,k}^L Y_{3,k}^L Z_{3,k}^L$ четвертого шарнира. При этом вместо матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L$ используется матрица преобразования $\boldsymbol{\alpha}_{4,k}$ при повороте вокруг оси $Y_{3,k}^J$

$$\mathbf{a}_{4,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cp_{4,k} & sp_{4,k} \\ 0 & -sp_{4,k} & cp_{4,k} \end{bmatrix}.$$

Ее вторая строка – это единичный вектор $\mathbf{y}_{4,k}^L$ в СК $X_{3,k}^J Y_{3,k}^J Z_{3,k}^J$. Вместо $\mathbf{\theta}_{6,k}^L$ используется матрица преобразования $\Psi_{3,k} = \gamma_{6,k}^L \tau_{6,0} \mathbf{\theta}_{3,k}^T$ из СК $X_{3,k}^J Y_{3,k}^J Z_{3,k}^J$ в систему $X_{6,k}^L Y_{6,k}^L Z_{6,k}^L$. Ее третья строка $\Psi_{3,k}(3)$ – это единичный вектор $\mathbf{z}_{6,k}^L$, выраженный в СК $X_{3,k}^J Y_{3,k}^J Z_{3,k}^J$. Условие замыкания для угловых координат в замещаемом универсальном шарнире запишется в виде

$$cp_{4,k} \Psi_{3,k}(3,2) + sp_{4,k} \Psi_{3,k}(3,3) = 0.$$

Величина $tg p_{4,k} = -\Psi_{3,k}(3,2) / \Psi_{3,k}(3,3)$ позволяет определить другие тригонометрические функции угла $p_{4,k}$ поворота штока вокруг своей оси

$$\cos p_{4,k} = 1 / \sqrt{1 + tg^2 p_{4,k}}, \quad \sin p_{4,k} = \text{sign}(tg p_{4,k}) \sqrt{1 - (\cos p_{4,k})^2}.$$

Если замещаемый шарнир сферический, то условия (2.2)-(2.4) не учитываются, число зависимых шарнирных переменных в каждой направляющей КЦ равно трем, соответственно корректируется размерность матричных коэффициентов в (2.9)-(2.15), угол поворота штока вокруг продольной оси в аналитическом решении не определяется.

3. Рекуррентный алгоритм синтеза уравнений динамики КЦ. Метод разделения переменных, позволяющий исключить из уравнений динамики зависимые переменные, применим, если используется замкнутая форма этих уравнений. Входящие в неё матрица обобщенной инерции и вектор обобщенных сил могут быть вычислены различными способами. Наиболее эффективным для простых КЦ с произвольным составом шарниров является алгоритм, основанный на рекуррентном решении обратной задачи динамики, позволяющий использовать только локальные СК отдельных тел, что определяет его относительно высокую вычислительную эффективность. Он впервые представлен в [12, 13], и впоследствии получил название алгоритм составного тела (Composite-Rigid-Body Algorithm) [14].

В статье [15] расчет матрицы обобщенной инерции и вектора обобщенных для платформы Гью-Стьюарта также основан на решении обратной задачи динамики. Получены компактные соотношения при допущении о том, что в каждой направляющей КЦ второй шарнир из трех является только поступательным, а третий, соединяющий ее с управляемым телом, сферическим. Но это не соответствует наиболее общему виду платформы. Кроме того, в [15] не ставилась задача определения сил и моментов, действующих на основание механизма. Поэтому этот подход далее не используется.

Алгоритм составного тела записывается более компактно при использовании блочных матриц и векторов. Ниже для исключения части избыточных матричных операций он представлен в виде отдельных соотношений для поступательных и угловых движений тел.

Матрицы $\mathbf{A}_k$ обобщенной инерции k -й КЦ вычисляются по столбцам и имеют размерность $(n_k \times n_k)$, где $n_k = 6$ при $k = 0$ и $n_k = 4$ при $k > 0$. При расчете элементов j -го ($j = \overline{1, n_k}$) столбца предполагается, что при $k = 0$ $\ddot{q}_j = 1$, $\ddot{q}_i = 0, i \neq j$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, а при $k > 0$ $\ddot{\mathbf{p}}_k(j) = 1$ и $\ddot{\mathbf{p}}_k(i) = 0, i \neq j$, $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{0}$. С учетом этого сначала для очередного j -го тела определяются векторы ускорений $\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l$, инерционных силы $\mathbf{f}_{j,k}^{I,l}$ и момента $\mathbf{m}_{j,k}^{I,l}$ тела $B_{j,k}$ по соотношениям

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l &= \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} \dot{\mathbf{q}}_j, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l = \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} \dot{\mathbf{q}}_j, \\ \mathbf{f}_{j,k}^{I,l} &= m_{j,k} \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l \mathbf{c}_{j,k}, \\ \mathbf{m}_{j,k}^{I,l} &= \mathbf{I}_{j,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l + \tilde{\mathbf{c}}_{j,k} \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l,\end{aligned}$$

где $\mathbf{c}_{j,k} = m_{j,k} \mathbf{d}_{j,k}$ – постоянный вектор.

В отличие от уравнений связей здесь используются (3×1) -матрицы парциальных скоростей только для относительных движений в шарнирах $\hat{\mathbf{T}}_{j,0}^{rel} = \partial \mathbf{v}_{j,0}^{rel} / \partial \dot{q}_j = \partial \dot{\mathbf{v}}_{j,0}^{rel} / \partial \ddot{q}_j$, $\hat{\mathbf{R}}_{j,0}^{rel} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,0}^{rel} / \partial \dot{q}_j = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,0}^{rel} / \partial \ddot{q}_j$ и $\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} = \partial \mathbf{v}_{j,k}^{rel} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k(j) = \partial \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k(j)$, $\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k(j) = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{rel} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k(j)$ которые для независимой и зависимых КЦ равны

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}_{1,0}^{rel} &= [1, 0, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{T}}_{2,0}^{rel} = [0, 1, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{T}}_{3,0}^{rel} = [0, 0, 1]^T, \quad \hat{\mathbf{R}}_{1,0}^{rel} = \hat{\mathbf{R}}_{2,0}^{rel} = \hat{\mathbf{R}}_{3,0}^{rel} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{R}}_{4,0}^{rel} &= [0, 1, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{R}}_{5,0}^{rel} = [0, 0, 1]^T, \quad \hat{\mathbf{R}}_{6,0}^{rel} = [1, 0, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{T}}_{4,0}^{rel} = \hat{\mathbf{T}}_{5,0}^{rel} = \hat{\mathbf{T}}_{6,0}^{rel} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{T}}_{1,k}^{rel} &= \hat{\mathbf{T}}_{2,k}^{rel} = \hat{\mathbf{T}}_{4,k}^{rel} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{T}}_{3,0}^{rel} = [1, 0, 0]^T, \\ \hat{\mathbf{R}}_{1,k}^{rel} &= [0, 1, 0]^T, \quad \hat{\mathbf{R}}_{2,k}^{rel} = [0, 0, 1]^T, \quad \hat{\mathbf{R}}_{3,k}^{rel} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{4,k}^{rel} = [1, 0, 0]^T.\end{aligned}$$

Далее для j -го столбца по прямым рекуррентным соотношениям ($i = \overline{j+1, n_k}$) вычисляются обусловленные предполагаемым движением тела $B_{j,k}$ векторы поступательных $\dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l$ и угловых $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l$ ускорений, силы $\mathbf{f}_{i,k}^{I,l}$ и моменты $\mathbf{m}_{i,k}^{I,l}$ инерции всех последующих тел КЦ

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l &= \boldsymbol{\beta}_{i,k} (\dot{\mathbf{v}}_{i-1,k}^l + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1,k}^l \mathbf{r}_{i-1,i,k}), \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l = \boldsymbol{\beta}_{i,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1,k}^l \\ \mathbf{f}_{i,k}^{I,l} &= m_{i,k} \dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l \mathbf{c}_{i,k}, \quad \mathbf{m}_{i,k}^{I,l} = \mathbf{I}_{i,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l + \tilde{\mathbf{c}}_{i,k} \dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l.\end{aligned}$$

После этого по обратным рекуррентным соотношениям ($i = \overline{n_k, j}$) вычисляются элементы j -го столбца матрицы $\mathbf{A}_k$ как проекции на ось i -го шарнира инерционных сил и моментов i -го и всех последующих тел

$$\mathbf{A}_k(i, j) = \begin{cases} \hat{\mathbf{T}}_{i,k}^{rel T} \mathbf{f}_{i,k}^{I,l}, & r_{i,k}^J = 0, \\ \mathbf{R}_{i,k}^{rel T} \mathbf{m}_{i,k}^{I,l}, & r_{i,k}^J = 1, \end{cases}$$

а также инерционные силы и моменты, приведенные к предшествующему телу КЦ (при $i > j$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{i,k}^{I,l(i-1)} &= \beta_{i,k}^T \mathbf{f}_{i,k}^{I,l}, \\ \mathbf{f}_{i-1,k}^{I,l} &= \mathbf{f}_{i-1,k}^{I,l} + \mathbf{f}_{i,k}^{I,l(i-1)}, \\ \mathbf{m}_{i-1,k}^{I,l} &= \mathbf{m}_{i-1,k}^{I,l} + \beta_{i,k}^T \mathbf{m}_{i,k}^{I,l} + \tilde{\mathbf{r}}_{i-1,i,k} \mathbf{f}_{i,k}^{I,l(i-1)}. \end{aligned}$$

Элементы вектора $\mathbf{b}_k$ обобщенных сил k -й КЦ вычисляются в предположении, что ускорения во всех шарнирах равны нулю, а скорости и координаты принимают свои фактические значения.

Сначала по прямым рекуррентным соотношениям ($j = \overline{1, n_k}$) вычисляются скорости, нелинейно зависящие от них составляющие поступательных $\mathbf{w}_{j,k}$ и угловых $\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}$ ускорений тел, суммарные векторы $\mathbf{f}_{j,k}^{IE,n}$ и $\mathbf{m}_{j,k}^{IE,n}$ инерционных и внешних сил и моментов. При этом все векторы и тензоры инерции выражены в локальной СК очередного тела, что уменьшает число матричных операций

$$\begin{aligned} k=0 &\rightarrow \mathbf{v}_{j,0}^{rel} = \hat{\mathbf{T}}_{j,0}^{rel} \dot{\mathbf{q}}_j, \quad \boldsymbol{\omega}_{j,0}^{rel} = \hat{\mathbf{R}}_{j,0}^{rel} \dot{\mathbf{q}}_j, \\ k>0 &\rightarrow \mathbf{v}_{j,k}^{rel} = \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} \dot{\mathbf{p}}(j), \quad \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel} = \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} \dot{\mathbf{p}}(j), \\ \boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(j)} &= \beta_{j,k} \boldsymbol{\omega}_{j-1,k}, \quad \boldsymbol{\omega}_{j,k} = \boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel}, \\ \mathbf{w}_{j,k} &= \beta_{j,k} (\mathbf{w}_{j-1,k} + (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j-1,k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}) \mathbf{r}_{j-1,j,k}) + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(j)} \mathbf{v}_{j,k}^{rel}, \\ \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n} &= -m_{j,k} \mathbf{w}_{j,k} - (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}) \mathbf{c}_{j,k}, \\ \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n} &= -\mathbf{I}_{j,k} \boldsymbol{\varepsilon}_{j,k} - \tilde{\mathbf{c}}_{j,k} \mathbf{w}_{j,k} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k} (\mathbf{I}_{j,k} \boldsymbol{\omega}_{j,k}). \end{aligned}$$

Если платформа функционирует в земных условиях, то добавляются действующие на j -е тело силы и моменты силы тяжести

$$\mathbf{f}_{j,k}^{IE,n} = \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n} - m_{j,k} \boldsymbol{\tau}_{j,k} \mathbf{g}, \quad \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n} = \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n} - \tilde{\mathbf{c}}_{j,k} \boldsymbol{\tau}_{j,k} \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g} = [g, 0, 0]^T$, g – ускорение свободного падения.

При $k=0$ к векторам $\mathbf{f}_{6,0}^{IE,n}$ и $\mathbf{m}_{6,0}^{IE,n}$ добавляются внешние сила $\mathbf{f}_{6,0}^E$ и момент $\mathbf{m}_{6,0}^E$, действующие на управляемое тело и выраженные в связанной с ним СК $X_{6,0} Y_{6,0} Z_{6,0}$

$$\mathbf{f}_{6,0}^{IE,n} = \mathbf{f}_{6,0}^{IE,n} + \mathbf{f}_{6,0}^E, \quad \mathbf{m}_{6,0}^{IE,n} = \mathbf{m}_{6,0}^{IE,n} + \mathbf{m}_{6,0}^E.$$

При $k>0$ запоминаются векторы

$$\mathbf{f}_{j,k}^{n,0} = \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n}, \quad \mathbf{m}_{j,k}^{n,0} = \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n},$$

которые используются далее при расчете сил и моментов, действующих на основание механизма.

После этого по обратным рекуррентным соотношениям ($j = \overline{n_k, 1}$) вычисляются элементы вектора $\mathbf{b}_k$ с добавлением внутренних активных силы $f_{j,k}^J$ или момента $m_{j,k}^J$, действующих вдоль оси шарнира (при $k=0$ внутренние активные силы и моменты равны нулю)

$$\mathbf{b}_k(j) = \begin{cases} \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel T} \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n} + f_{j,k}^J, & r_{j,k}^J = 0, \\ \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel T} \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n} + m_{j,k}^J, & r_{j,k}^J = 1, \end{cases}$$

а также вычисляются силы и моменты, приведенные к предшествующему телу КЦ (при $j > 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n(j-1)} &= \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n}, \\ \mathbf{f}_{j-1,k}^{IE,n} &= \mathbf{f}_{j-1,k}^{IE,n} + \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n(j-1)}, \\ \mathbf{m}_{j-1,k}^{IE,n} &= \mathbf{m}_{j-1,k}^{IE,n} + \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{m}_{j,k}^{IE,n} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k} \mathbf{f}_{j,k}^{IE,n(j-1)}. \end{aligned}$$

4. Редукция уравнений динамики механической системы. Уравнения динамики параллельного механизма без учета уравнений контурных связей могут быть представлены в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(d)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}^{(d)} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_0 - (6 \times 6)$ – матрица обобщенной инерции, $\mathbf{b}_0 - (6 \times 1)$ – вектор обобщенных сил управляемого тела; $\mathbf{A}^{(d)} = \text{diag} [\mathbf{A}_k]$ – блочная (24×24) – матрица и $\mathbf{b}^{(d)} = [\mathbf{b}_k^T]^T$ – блочный (24×1) – вектор; $\mathbf{A}_k - (4 \times 4)$ – матрица обобщенной инерции и $\mathbf{b}_k - (4 \times 1)$ – вектор обобщенных сил k -й направляющей КЦ; $\ddot{\mathbf{p}} = [\ddot{\mathbf{p}}_1^T, \dots, \ddot{\mathbf{p}}_6^T]^T$ – вектор зависимых шарнирных ускорений.

Все направляющие КЦ цепи не связаны непосредственно между собой и каждую из них совместно с управляемым телом можно рассматривать независимо. Таким образом управляемое тело и k -я направляющая КЦ образуют k -ю подсистему, в которой их связывают уравнения связей в координатах

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{u}_k, t) = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{f}_k - (4 \times 1)$ – вектор, $\mathbf{u}_k = [\mathbf{q}^T, \mathbf{p}_k^T]^T - (10 \times 1)$ – вектор шарнирных переменных.

Уравнения динамики такой подсистемы с учетом связей, влияние которых учитывается через множители Лагранжа, записываются в виде

$$\mathbf{A}_k^u \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{C}_k^T \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{b}_k^u, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{A}_k^u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} - (10 \times 10)$ – матрица, $\mathbf{b}_k^u = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix} - (10 \times 1)$ – вектор,

$\mathbf{C}_k = \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}_k(\mathbf{u}, t)}{\partial \dot{\mathbf{u}}_k} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{f}}_k(\mathbf{u}, t)}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_k} - (4 \times 10)$ – матрица, $\boldsymbol{\lambda}_k - (4 \times 1)$ – вектор.

Объединение (4.2) с уравнениями связей (4.1) приводит к системе дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) с индексом 3 [16]. Для ее приведения к общему составу переменных необходимо использовать BDF (Back Differential Formula) методы [17-19.]. Если использовать уравнения связей, записанные относительно ускорений

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{f}}_k(\mathbf{u}, t)}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{c}_k = \mathbf{C}_k \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{c}_k,$$

то СДАУ будет иметь общий набор неизвестных (индекс 1).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^u & \mathbf{C}_k^T \\ \mathbf{C}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_k^u \\ \mathbf{c}_k \end{bmatrix}.$$

Но даже в этом случае необходимо применять различные специальные методы их решения [20, 21]. Для описания динамики системой обыкновенных дифференциальных уравнений минимальной размерности (4.2) преобразуется с помощью разделения шарнирных переменных [22] на основе решения в явном виде (2.12) уравнений связей для ускорений

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_k = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_6 \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_k \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{H,k} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_k \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

где столбцы (10×6) – матрицы $\mathbf{C}_{H,k} = [\mathbf{1}_6, \mathbf{H}_k^T]^T$ представляют собой векторы возможных перемещений k -й подсистемы, выраженные через (6×1) – вектор независимых возможных перемещений.

Подстановка в (4.3) в (4.2)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{H}_k \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^{(i)T} \\ \mathbf{C}_k^{(d)T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

проводит к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^{(i)T} \\ \mathbf{C}_k^{(d)T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix},$$

которая проецируется на (10×1) – вектор возможных перемещений k -й механической подсистемы, то есть умножается на матрицу $\mathbf{C}_{H,k}^T = [\mathbf{1}_6, \mathbf{H}_k^T]$

$$[\mathbf{1}_6 \mathbf{H}_k^T] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k^{(i)T} \\ \mathbf{C}_k^{(d)T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix} \right\}.$$

В полученном результате

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k + (\mathbf{C}_k^{(i)T} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{C}_k^{(d)T}) \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{b}_0 + \mathbf{H}_k^T \mathbf{b}_k$$

вследствие того, что

$$\mathbf{C}_k^{(i)T} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{C}_k^{(d)T} = \mathbf{C}_k^{(i)T} - [\mathbf{C}_k^{(d)-1} \mathbf{C}_k^{(i)}]^T \mathbf{C}_k^{(d)T} = \mathbf{C}_k^{(i)T} - [\mathbf{C}_k^{(d)} \mathbf{C}_k^{(d)-1} \mathbf{C}_k^{(i)}]^T = \mathbf{0}$$

исключается вектор неопределенных множителей Лагранжа

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{H}_k^T (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k).$$

Окончательно редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений динамики параллельного механизма с шестью направляющими кинематическими цепями записывается в виде

$$\mathbf{A}_0^* \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}_0^*, \quad (4.5)$$

где

$$\mathbf{A}_0^* = \mathbf{A}_0 + \sum_{k=1}^6 \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k, \quad \mathbf{b}_0^* = \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^6 \mathbf{H}_k^T (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k), \quad (4.6)$$

$\mathbf{A}_0^*$ – (6×6) – обобщенная матрица инерции, $\mathbf{b}_0^*$ – (6×1) – вектор обобщенных сил.

В статье [15] рассмотрен вариант платформы, в котором в каждой направляющей КЦ для передачи момента от управляемого привода используется обычный шарико-винтовой преобразователь (ШВП), в котором винт может перемещаться только поступательно, а гайка – только вращаться. При этом поступательное x_{Screw} и угловое ϕ_{Nut} перемещения связаны через шаг винта t соотношением $\phi_{Nut} = (2\pi/t) x_{Screw} = i_N x_{Screw}$, где $i_N = 2\pi/t$ – коэффициент передачи ШВП. Гайка преобразует подаваемый на неё момент m_{Nut} в силу $f_{Screw} = i_N m_{Nut}$, действующую на винт. Суммарный момент инерции I_{Nut}^Σ гайки и всех связанных с нею звеньев вращения создает добавочную приведенную осевую массу винта $\Delta m_x = i_N^2 I_{Nut}^\Sigma$.

В периферийных стыковочных механизмах [6] иногда используются дифференциальные ШВП, в которых винт может одновременно перемещаться поступательно и вращаться относительно своей продольной оси, то есть соответствует цилиндрическому шарниру. Его поступательное перемещение x_{Screw} определяется разностью собственного угла поворота ϕ_{Screw} и угла p_{Nut} поворота гайки. При правом направлении винта шарнирные координаты ШВП и их производные по времени изменяются в соответствии с уравнениями связей

$$p_{Nut} = i_N x_{Screw} + \phi_{Screw}, \quad \dot{p}_{Nut} = i_N \dot{x}_{Screw} + \dot{\phi}_{Screw}, \quad \ddot{p}_{Nut} = i_N \ddot{x}_{Screw} + \ddot{\phi}_{Screw}.$$

Если в качестве зависимых шарнирных переменных выбрать углы поворота гайки и их производные, то по аналогии с (2.12) – (2.14) решение этих уравнений для k -й направляющей КЦ платформы может быть записано в виде

$$p_{Nut,k} = \mathbf{H}_N \mathbf{p}_k, \quad \dot{p}_{Nut,k} = \mathbf{H}_N \dot{\mathbf{p}}_k, \quad \ddot{p}_{Nut,k} = \mathbf{H}_N \ddot{\mathbf{p}}_k,$$

где $\mathbf{H}_N = [0, 0, i_N, 1]$ – (1×4) – матрица.

В соответствии с методом разделения переменных и аналогично (4.6) матрицы $\mathbf{A}_k$ и векторы $\mathbf{b}_k$ до применения (4.6) корректируются по соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^* &= \mathbf{A}_k + \mathbf{H}_{N,k}^T I_{Nut}^\Sigma \mathbf{H}_{N,k} = \mathbf{A}_k + \Delta \mathbf{A}_k, \\ \mathbf{b}_k^* &= \mathbf{b}_k + \mathbf{H}_{N,k}^T m_{Nut,k} = \mathbf{b}_k + \Delta \mathbf{b}_k, \end{aligned}$$

где

$$\Delta \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_N^2 & i_N \\ 0 & 0 & i_N & 1 \end{bmatrix} I_{Nut}^\Sigma, \Delta \mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_N \\ 1 \end{bmatrix} m_{Nut,k},$$

В некоторых работах отмечается, что разделение переменных и использование решения уравнений связей для редукции уравнений динамики приводят к соотношениям, которые требуют большего объема вычислений по сравнению с использованием множителей Лагранжа и технологии решения разреженных систем уравнений. Но это может иметь место только при необходимости определения набора независимых переменных в уравнениях связи самого общего вида. При однозначном предварительном определении состава независимых переменных такое замечание является спорным. Кроме того, в нем не учитываются вычислительные затраты, связанные с интегрированием СДАУ.

5. Расчет сил и моментов, действующих на основание механизма.

Вектор λ_k множителей Лагранжа, входящий в правую часть уравнений динамики k -й направляющей кинематической цепи (вторая строка в блочно-матричной записи уравнений (4.4))

$$\mathbf{A}_k^{(d)} (\mathbf{H}_k \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_k) = \mathbf{b}_k^{(d)} - \mathbf{C}_k^{(d)T} \lambda_k$$

является обобщенной силой, и выраженной в СК основания. После определения в результате решения уравнений связей зависимых шарнирных координат $\mathbf{p}_k$ и их производных $\dot{\mathbf{p}}_k, \ddot{\mathbf{p}}_k$ с учетом того, что $[\mathbf{C}_k^{(d)T}]^{-1} = [\mathbf{C}_k^{(d)-1}]^T$, его можно определить как

$$\lambda_k = [\mathbf{C}_k^{(d)-1}]^T (\mathbf{b}_k^{(d)} - \mathbf{A}_k^{(d)} \ddot{\mathbf{p}}_k).$$

То есть вектор λ_k есть следствие действия на управляемое тело со стороны k -й направляющей КЦ в соответствии с ее структурой связей (видом и последовательностью шарниров). Действие этой же КЦ на основание платформы в центре ее первого шарнира может быть вычислено на основе учета ее активных и инерционных сил и моментов. Рекуррентный алгоритм такого расчета основан на следующих соотношениях.

Условия равновесия сил и моментов, действующих на тело $B_{j,k}$, имеют вид

$$\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^R + \mathbf{f}_{j,k}^J + \mathbf{f}_{j,k}^{S(j)} = \mathbf{0}, \mathbf{m}_{j,k}^{IE} + \mathbf{m}_{j,k}^R + \mathbf{m}_{j,k}^J + \mathbf{m}_{j,k}^{S(j)} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{f}_{j,k}^{IE}, \mathbf{m}_{j,k}^{IE}$ – суммарные инерционные и внешние сила и момент; $\mathbf{f}_{j,k}^R, \mathbf{m}_{j,k}^R$ – сила и момент реакции в j -м шарнире k -й кинематической цепи; $\mathbf{f}_{j,k}^J, \mathbf{m}_{j,k}^J$ – внутренние активные сила и момент, создаваемые в этом шарнире устройствами демпфирования или приводами; $\mathbf{f}_{j,k}^S, \mathbf{m}_{j,k}^S$ – сила и момент, действующие со стороны всех последующих тел и выраженные в СК тела $B_{j,k}$.

Относительное движение в шарнире $J_{k,j}$ осуществляется вдоль i -й оси ($i \in \overline{1,3}$) с единичным вектором $\mathbf{e}_{j,k}^i$. Для поступательного шарнира ($r_{j,k}^J = 0$) $\mathbf{e}_{j,k}^i = \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} = \partial \mathbf{v}_{j,k}^{rel} / \partial p_{j,k}$. Проекция на этот вектор условия равновесия сил, действующих на тело $B_{j,k}$, исключает силу реакции

$$\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{relT} (\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}) + f_{j,k}^J = 0,$$

то есть на тело вдоль $\mathbf{e}_{j,k}^i$ со стороны шарнира действует внутренняя активная сила f_j^J , преодолевающая силу его инерции (и, возможно, веса), а также силу от последующих тел. Проекции этого же условия равновесия на оси $\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 1}$ и $\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 2}$ $\mathbf{e}_{j,k\oplus 2}$ ($\oplus$ означает циклическую подстановку следующих за номером i значений из множества $\overline{1,3}$) определяют соответствующие компоненты реакции

$$\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 1T} \mathbf{f}_{j,k}^R = -\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 1T} (\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}), \quad \mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 2T} \mathbf{f}_{j,k}^R = -\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 2T} (\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}).$$

Суммарный вектор силы, действующей через шарнир на предшествующее тело и выраженной в СК $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ тела $B_{j,k}$ с единичными векторами $\mathbf{e}_{j,k}^1, \mathbf{e}_{j,k}^2, \mathbf{e}_{j,k}^3$ равен

$$\mathbf{f}_{j-1,k}^{S(j)} = -\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} f_{j,k}^J + \mathbf{N}_{j,k}^R (\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}),$$

где $\mathbf{N}_{j,k}^R = (\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 1} \mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 1T} + \mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 2} \mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus 2T})$ – постоянная диагональная (3×3) –матрица, у которой i -й диагональный элемент равен нулю, а остальные равны 1.

Так как в поступательном шарнире $\mathbf{m}_{j,k}^J = \mathbf{0}$, то момент реакции, действующий на тело $B_{j,k}$, равен $\mathbf{m}_{j,k}^R = -(\mathbf{m}_{j,k}^{IE} + \mathbf{m}_{j,k}^S)$. На предшествующее тело через шарнир действует момент $\mathbf{m}_{j-1,k}^{S(j)} = \mathbf{m}_j^{IE} + \mathbf{m}_j^S$, выраженный в системе координат очередного тела.

Аналогично предшествующему во вращательном шарнире ($r_{j,k}^J = 1$) $\mathbf{e}_{j,k}^i = \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel} / \partial p_{j,k}$, и на тело $B_{j-1,k}$ действуют сила и момент, выраженные в СК $X_{j,k} Y_{j,k} Z_{j,k}$ тела $B_{j,k}$

$$\mathbf{f}_{j-1,k}^{S(j)} = \mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^S, \quad \mathbf{m}_{j-1,k}^{S(j)} = -\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} \mathbf{m}_j^J + \mathbf{N}_{j,k}^R (\mathbf{m}_{j,k}^{IE} + \mathbf{m}_{j,k}^S).$$

Сила $\mathbf{f}_{j-1,k}^S$ и момент $\mathbf{m}_{j-1,k}^S$, выраженные в СК $X_{j-1,k} Y_{j-1,k} Z_{j-1,k}$ предшествующего тела $B_{j-1,k}$ равны

$$\mathbf{f}_{j-1,k}^S = \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{f}_{j-1,k}^{S(j)}, \quad \mathbf{m}_{j-1,k}^S = \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{m}_{j-1,k}^{S(j)} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k} \mathbf{f}_{j-1,k}^S.$$

Вычисление сил и моментов, действующих на основание механической системы в центре первого шарнира k -й периферийной кинематической цепи, реализуется в ходе прямого и обратного рекуррентного процессов. В первом,

прямо по известным шарнирным ускорениям вычисляются суммарные векторы инерционных и активных сил и моментов, действующих на каждое тело. При этом используются векторы $\mathbf{f}_{j,k}^{n,0}$ и $\mathbf{m}_{j,k}^{n,0}$, определенные при вычислении вектора $\mathbf{b}_k$ обобщенных сил. Для $j = \overline{1,4}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel} &= \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_{j,j}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{rel} = \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_{j,k}, \\ \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l &= \boldsymbol{\beta}_{j,k} (\dot{\mathbf{v}}_{j-1,k}^l - \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^l) + \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l &= \boldsymbol{\beta}_{j,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^l + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{rel}, \\ \mathbf{f}_{j,k}^{IE} &= -m_{j,k} \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l - \tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l + \mathbf{f}_{j,k}^{n,0}, \\ \mathbf{m}_{j,k}^{IE} &= -\tilde{\mathbf{c}}_{j,k} \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l - \mathbf{I}_{j,k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l + \mathbf{m}_{j,k}^{n,0}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Во втором, обратном рекуррентном процессе вычисляются силы и моменты, действующие на все предшествующие тела и в итоге на основание механизма. Для $j = \overline{4,1}$ при $\mathbf{f}_{4,k}^S = \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_{4,k}^S = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{j-1,k}^{S(j)} &= \begin{cases} -\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} \mathbf{f}_{j,k}^J + \mathbf{N}_{j,k}^R (\mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^S), & r_{j,k}^J = 0, \\ \mathbf{f}_{j,k}^{IE} + \mathbf{f}_{j,k}^S, & r_{j,k}^J = 1, \end{cases} \\ \mathbf{m}_{j-1,k}^{S(j)} &= \begin{cases} \mathbf{m}_{j,k}^{IE} + \mathbf{m}_{j,k}^S, & r_{j,k}^J = 0, \\ -\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} \mathbf{m}_{j,k}^J + \mathbf{N}_{j,k}^R (\mathbf{m}_{j,k}^{IE} + \mathbf{m}_{j,k}^S), & r_{j,k}^J = 1, \end{cases} \\ \mathbf{f}_{j-1,k}^S &= \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{f}_{j-1,k}^{S(j)}, \\ \mathbf{m}_{j-1,k}^S &= \boldsymbol{\beta}_{j,k}^T \mathbf{m}_{j-1,k}^{S(j)} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k} \mathbf{f}_{j-1,k}^S.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Суммарные сила и момент, действующие на основание платформы, выраженные в системе координат $X_0Y_0Z_0$ его основания, равны

$$\mathbf{f}_0^S = \sum_{k=1}^6 \mathbf{f}_{0,k}^S, \quad \mathbf{m}_0^S = \sum_{k=1}^6 \mathbf{m}_{0,k}^S.$$

При моделировании стыковочного механизма они определяют движение активного космического аппарата наряду с силами и моментами его системы управления.

6. Последовательность вычислений при моделировании. При моделировании динамики платформы Гью-Стьюарта в пределах одного шага интегрирования последовательно вычисляются:

- относительные перемещения в шарнирах направляющих периферийных КЦ – решением уравнений контурных связей для координат;
- коэффициенты уравнений связей для скоростей и скорости изменения шарнирных переменных в периферийных КЦ;
- коэффициенты уравнений связей относительно ускорений, нелинейно зависящие от шарнирных координат и скоростей;

- внутренние активные силы и моменты, создаваемые устройствами демпфирования или приводами, связанными с шарнирами периферийных КЦ (по известным шарнирным координатам и скоростям);
- обобщенные матрицы инерции и векторы обобщенных сил управляемого тела (с учетом активных внешних сил) и направляющих КЦ (с учетом внутренних активных сил и моментов);
- обобщенная матрица инерции и вектор обобщенных сил редуцированных уравнений динамики параллельного механизма и независимые ускорения управляемого тела;
- зависимые шарнирные ускорения в периферийных кинематических цепях – решением уравнений связей для ускорений;
- силы и моменты действующие на основание механизма.

Все используемые рекуррентные соотношения записаны в матричном виде для простых КЦ с произвольным составом шарниров. Они требуют большего объема вычислений, чем в модели, описанной в [15]. Для повышения вычислительной эффективности целесообразна их оптимизация с использованием системы символьных преобразований, ориентированной на выполнение матричных операций [23].

Заключение. Представленные алгоритмы расчета уравнений динамики платформы Гью-Стьюарта в ее наиболее общем виде могут служить основой для разработки математических моделей различных технических устройств, в частности существующих и перспективных стыковочных механизмов. Эти алгоритмы не содержат избыточных векторно-матричных операций. Возможна их дальнейшая оптимизация с использованием системы символьных преобразований.

Список литературы

1. ParalleMIC – the Parallel Mechanisms Information Center. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.parallemic.org>.
2. Pritschow G., Wurst K.-H. Systematic design of hexapods and other parallel link systems. *Annals of the CIRP*, Vol. 46, No. 1, pp. 291-295, 1997. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850607608282>.
3. Gough V.E., Whitehall S.G. Universal tyre test machine. // *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, May. 1962, pp. 117-137.
4. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. – 1965, vol. 180, part 1, no. 15, pp. 371-386.
5. Mathematical model for the simulation of dynamic docking test system (DDTS) active table motion (Boeing Aerospace Company, Houston, Texas). NASA-CR-140288. 1974, 57 p.
6. Сыромятников В.С. Стыковочные устройства космических аппаратов. – М.: Машиностроение. 1984. – 216 с.
7. Fense W. *Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft*. – Cambridge University Press, 2003, 495 P.

8. Caporicci M., Urmston P., Gracia O. IBDM: The International Berthing Docking Mechanism for human missions to low orbit and exploration // *Proceedings of the 61st International Astronautical Congress 2010. IAC-10,C2,7,9.* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://iafastro.directory/iac/archive/browse/IAC-10/C2/7/8486/>.
9. Ghofranian S., Chuang L-P., Motaghedi P. The Boeing Company, Spacecraft Docking System // Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
10. Patent WO2018014676 (A1). Spacecraft docking system and method / Liu Zhi, Zhang Chongfeng, Jin ZongGxiang, Shi Junwei, Xie Zhe, Hu Xufping. – 2018-01-25.
11. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* – 2019. – №59. – 32 с.
12. Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью // *Механика машин.* – 1974. – Вып. 44. – С. 77-88.
13. Walker M.W., Orin D.E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms // *Transaction of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control.* 1982, vol. 104, pp. 205-211.
14. Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA, April 2000,* pp. 826-834.
15. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // *Robotica.* 2003, vol. 21, pp. 541-554.
16. Petzold L.R. Computational challenges in mechanical system simulation // *Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems.* – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994, pp. 483-499.
17. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling // *Numerical algorithms.* 1998, vol. 19, pp. 183-194.
18. Rampalli R., Vikram Sohoni V., Steigerwald M.F., Joseph F. McGrath J.F. Numerical Methods in ADAMS Mechanical Simulation Code. Mechanical Dynamics, Inc., 1990. – 14 p.
19. Ibrahim Z.B., Suleiman M., Othman K.I. Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations // *International Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering.* 2008, vol. 2, no. 2, pp. 260-262.
20. Baumgarte J.W. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamic Systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1972, vol. 1, pp. 1-16.
21. Горобцов А.С., Солоденков С.В. Алгоритмы численного интегрирования уравнения движения систем тел с множителями Лагранжа // *Машиностроение и инженерное образование.* – 2005. – № 3. – С. 20-27.
22. Wehage R.A., Haug J.E. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems // *Journal of Mechanical Design.* 1982, no. 104, pp. 247-255.
23. Яскевич А.В. Модель данных для символьной оптимизации алгоритмов моделирования динамики систем твердых тел // *Journal of Advanced Research in Natural Science.* – 2025. – №23. – С. 33-45.

References

1. ParalleMIC – the Parallel Mechanisms Information Center. [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.parallemic.org>.
2. Pritschow G., Wurst K.-H. Systematic design of hexapods and other parallel link systems. *Annals of the CIRP*, Vol. 46, No. 1, pp. 291-295, 1997. [Electronic resource]. – Access mode: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850607608282>.
3. Gough V.E., Whitehall S.G. Universal tyre test machine. // *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, May. 1962, pp. 117-137.
4. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1965, vol. 180, part 1, no. 15, pp. 371-386.
5. Mathematical model for the simulation of dynamic docking test system (DDTS) active table motion (Boeing Aerospace Company, Houston, Texas). NASA-CR-140288. 1974, 57 p.
6. Syromiatnikov V.S. Spacecraft docking devices. – M.: Mechanical Engineering, 1984. – 216 p.
7. Fense W. Automated Rendezvous and Docking of Spacecraft. – Cambridge University Press, 2003, 495 p.
8. Caporicci M., Urmston P., Gracia O. IBDM: The International Berthing Docking Mechanism for human missions to low orbit and exploration // *Proceedings of the 61st International Astronautical Congress 2010*. IAC-10,C2,7,9. [Electronic resource]. – Access mode: <https://iafastro.directory/iac/archive/browse/IAC-10/C2/7/8486/>.
9. Ghofranian S., Chuang L.-P., Motaghedi P. The Boeing Company, Spacecraft Docking System // Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
10. Patent WO2018014676 (A1). Spacecraft docking system and method / Liu Zhi, Zhang Chongfeng, Jin ZongGxiang, Shi Junwei, Xie Zhe, Hu Xufping. – 2018-01-25.
11. Golubev Y.P., Yaskevich A.V. Dynamic equations of peripheral docking mechanisms as parallel manipulators // *Preprints of Applied Mathematic Institute named M.V. Keldysh*. 2019, no. 59, 32 p.
12. Stepanenko Y.A. Dynamic analysis algorithm for spatial mechanisms with open loop // *Machine mechanics*. 1974, iss. 44, pp. 77-88.
13. Walker M.W., Orin D.E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms // *Transaction of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1982, vol. 104, pp. 205-211.
14. Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, CA, April 2000, pp. 826-834.
15. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // *Robotica*. 2003, vol. 21, pp. 541-554.
16. Petzold L.R. Computational challenges in mechanical system simulation // *Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems*. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994, pp. 483-499.
17. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling // *Numerical algorithms*. 1998, vol. 19, pp. 183-194.
18. Rampalli R., Vikram Sohoni V., Steigerwald M.F., Joseph F. McGrath J.F. Numerical Methods in ADAMS Mechanical Simulation Code. Mechanical Dynamics, Inc., 1990. – 14 p.

19. Ibrahim Z.B., Suleiman M., Othman K.I. Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations // Int. Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering. 2008, vol. 2, no. 2, pp. 260-262.
20. Baumgarte J.W. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1972, vol. 1, pp. 1-16.
21. Gorobtsov A.S., Solodenkov S.V. Algorithms for numerical integration of motion equations of body systems with Lagrangian multipliers // Machine-building and engineering education. 2005, no. 3, pp. 20-27.
22. Wehage R.A., Haug J.E. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems // Journal of Mechanical Design. 1982, no. 104, pp. 247-255.
23. Yaskevich A.V. A data model for symbolic optimization of multi body dynamic simulation algorithms // Journal of Advanced Research in Natural Science. 2025, iss. 23, pp. 33-45.

Яскевич Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, эксперт по динамике электромеханических систем	Yaskevich Andrey Vladimirovich – doctor of physic-mathematical sciences, expert on dynamic electromechanical systems
Andrey.Yaskevich@rscr.ru	

Received 31.08.2026