

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК ЭКВИВАЛЕНТА ЕЕ ВНУТРЕННИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ЕЕ ДВИЖЕНИЕ

Савелькаев С.В.

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
Новосибирск, Россия*

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, сложное движение, принцип Д'Аламбера, аксиома связи для относительных сил инерции, уравнения движения, относительность времени, сохранение энергии и импульса, минимум действия.

Аннотация. В статье рассмотрена механическая система, состоящая из двух тел с массами m_1 и m_2 , связанных кинематической шарнирно-стержневой связью в виде жесткого прямолинейного стержня R с возможностью их относительного вращательного движения друг относительно друга, а также относительно их центра масс. Исходя из принципа Д'Аламбера, записанного с учетом аксиомы связи для несвободной материальной точки, получены уравнения движения каждого из ее тел m_1 и m_2 в отдельности и их центра масс в поле относительных сил инерции диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 в вакууме и диссипативной среде. Показано, что время в собственных системах отсчета ее тел m_1 и m_2 по отношению к времени в системе отсчета их центра масс является относительным и зависит от кинематических характеристик и соотношения масс ее тел. Время в системе отсчета центра масс и лабораторной системе отсчета абсолютно. Кроме того выполнен анализ распределения импульса замкнутой механической системы между ее телами, а также установлена связь этого распределения с ее энергетическим балансом для различных начальных условий, где показано, что ее движение в поле относительных сил инерции удовлетворяет законам сохранения импульса и энергии, а также минимуму действия.

THE INFLUENCE OF THE FIELD OF RELATIVE INERTIAL FORCES OF A TWO-MASS MECHANICAL SYSTEM AS AN EQUIVALENT OF ITS INTERNAL INTERACTIONS ON ITS MOTION

Savel'kaev S.V.

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia

Keywords: two-mass mechanical system, complex motion, D'Alembert's principle, constraint axiom for relative inertial forces, equations of motion, relativity of time, conservation of momentum and energy, minimum action

Abstract. The article considers a mechanical system consisting of two bodies with masses m_1 and m_2 connected by a kinematic hinge-rod connection in the form of a rigid rectilinear rod R with the possibility of their relative rotational motion relative to each other, as well as relative to their center of mass. Based on D'Alembert's principle, written taking into account the connection axiom for a non-free material point, the equations of motion of each of its bodies m_1 and m_2 separately and their center of mass in the field of relative inertial forces of diametrically opposite bodies m_2 and m_1 in a vacuum and dissipative medium were obtained. It is shown that time in the own frames of reference of its bodies m_1 and m_2 in relation to time in the frame of reference of their center of mass is relative and depends on the kinematic characteristics and the ratio of the masses of its bodies. Time in the center of mass reference frame and the laboratory reference frame is absolute. In addition, an analysis of the

distribution of momentum of a closed mechanical system between its bodies was carried out, and a connection was established between this distribution and its energy balance for various initial conditions, where it was shown that its movement in the field of relative inertial forces satisfies the laws of conservation of momentum and energy, as well as the minimum action.

Введение. В теоретической механике для сведения задач динамики двух взаимодействующих материальных тел m_i и m_j к наиболее простым задачам статики второй закон Ньютона представляют в виде принципа Д'Аламбера, который с учетом аксиомы связей для несвободной материальной точки можно записать в виде [1].

$$\vec{\Phi}_i + \vec{R}_{ji} + \vec{F}_i = 0; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (1)$$

где $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$ – сила инерции тела m_i в неподвижной лабораторной системе отсчета K и $\vec{a}_i$ – его абсолютное ускорение в этой системе отсчета; $\vec{R}_{ji}$ – реакция связи R , направленная от тела m_i к телу m_j , которой противодействует сила инерции $\vec{\Phi}_i$ тела m_i ; F_i – внешняя сила, приложенная к телу m_i в лабораторной системе отсчета K .

Сила инерции $\vec{\Phi}_i$ в принципе Д'Аламбера (1) учитывает не инерциальность собственной системы отсчета K_i тела m_i , так, что этот принцип инвариантен как по отношению к системе отсчета K_i , так и по отношению к лабораторной системе отсчета K . Эту силу в механике рассматривают как фиктивную [2], введенную только для того, чтобы свести задачи динамики к наиболее простым задачам статики.

Целью работы является переход от принципа Д'Аламбера (1) к уравнению динамики каждого из взаимодействующих тел m_i и m_j в отдельности в поле относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{ji}$ тел m_i и m_j , заменяющем неизвестные реакции $\vec{R}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$ их связи R .

Рассмотрим замкнутую ($\vec{F}_i = 0$) механическую систему, состоящая из двух тел m_i и m_j (МС2) [3, 4], которая показана на рисунке 1, а. Ее тела m_i и m_j связаны между собой жестким прямолинейным стержнем с длиной $R = r_{12} = r_{21}$, который установлен на них с помощью идеальных шарниров (кинематическая шарнирно-стержневая связь R).

На рассматриваемую МС2 действуют два вида сил инерции:

1. Собственная сила инерции $\vec{\Phi}_i = -m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = -m_i \vec{a}_i; i = 1, 2$ тела m_i ,

входящая в принцип Д'Аламбера (1). Она является фундаментальным свойством этого тела и характеризует его физическое свойство противодействовать искривлению траектории его равномерного прямолинейного движения в лабораторной системе отсчета K под действием сил любой природы (например, Гука, Кулона или Ньютона). Применительно к двум связанным телам m_i и m_j , совершающим движение по круговым

траекториям относительно их центра масс (ЦМ) C , такими силами является их центробежные силы инерции.

2. Относительная сила инерции $\vec{\Phi}_{ji} = -\frac{d}{dt}m_j\vec{v}_{ji} = -m_j\vec{a}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$.

Она приложена к рабочему телу m_j , которое в собственной системе отсчета K_i опорного тела m_i совершает относительное движение с относительными скоростью $\vec{v}_{ji}$ и ускорением $\vec{a}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$. Выбор опорного тела из двух тел МС2 при их равных массах $m_i = m_j$ равноправен. Если $m_i \gg m_j$, то за опорное тело следует выбирать тело с большей массой.

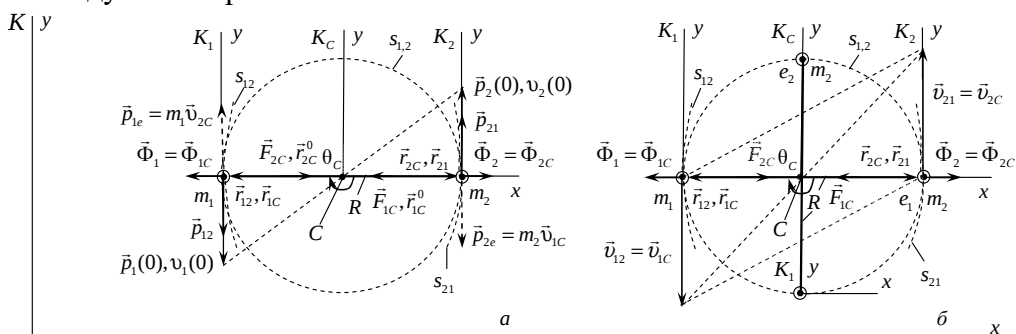


Рис. 1. Кинематическая схема двухмассовой механической системы с диаметральным $\theta_C = -\pi$ распределением масс – а и карта событий e_1 и e_2 , характеризующая то, что для инвариантного поворота тела m_2 в системах отсчета K_1 и K_C на угол $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$ это тело будет находиться в одной и той же точке лабораторной системы отсчета $K - б$

Уравнения динамики замкнутой МС2

Вывод уравнения динамики тел m_1 и m_2 замкнутой МС2 осуществим на примере ее кинематической схемы, показанной на рисунке 1, а. Кинематическая шарнирно-стержневая связь R ее тел m_1 и m_2 обеспечивает их плоское относительное поступательное движение в собственных системах отсчета K_2 и K_1 диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 по траекториям в виде окружностей s_{12} и s_{21} (на рисунке 1, а показаны частично), а также одновременное плоское поступательное движение этих тел в системе отсчета K_C , связанной с их ЦМ C по траектории в виде окружности $s_{1,2}$ (общей при равенстве масс $m_1 = m_2$), так, что оси координат систем отсчета K_C , K_1 и K_2 , а также неподвижной лабораторной системы отсчета K всегда параллельны. Кинематическая шарнирно-стержневая связь R является невесомой, ее шарниры идеальные, а тела m_1 и m_2 точечные.

Так как кинематическая шарнирно-стержневая связь R приводит к искривлению траекторий $s_{1,2}$, s_{21} и s_{12} движения тел m_2 и m_1 , то в системах отсчета K_C , K_1 и K_2 на эти тела действуют собственные $\vec{\Phi}_{ic}$ и относительные $\vec{\Phi}_{ji}$ силы инерции этих тел, противодействующие искривлению траекторий их движения.

По отношению к системе отсчета K движение тел $m_j; j=1,2$ вместе с собственными системами отсчета K_i диаметрально противоположных тел $m_i; i=1,2; i \neq j$ является переносным, тогда как по отношению к собственным системам отсчета K_i тел m_i является относительным. Вследствие чего тела m_j в системе отсчета K совершают сложное переносно-относительное поступательное движение по траектории $s_{1,2}$, которое формирует перекрестный член U взаимного влияния переносного и относительного движений друг на друга, что будет учтено при выводе уравнений динамики МС2.

Траектории $s_{1,2}$ движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C определены радиус-векторами $\vec{r}_{1C}$ и $\vec{r}_{2C}$, а траектории s_{12} и s_{21} их относительного движения в собственных системах отсчета K_2 и K_1 диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 – радиус-векторами $\vec{r}_{12}$ и $\vec{r}_{21}$, модули которых равны $r_{12} = r_{21} = R$. Радиус-векторы $\vec{r}_{1C}$ и $\vec{r}_{2C}$ определены уравнениями $m_1\vec{r}_{1C} + m_2\vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$ в виде [1, 5]:

$$\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}; \quad \vec{r}_{2C} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}. \quad (2)$$

Общее количество обобщенных координат рассматриваемой МС2 в плоском движении, определяющих ее кинетическую энергию от двух переносно-относительных поступательных движений ее тел m_1 и m_2 , при поочерёдном выборе их диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 за опорное, составляет:

– Две полярные координаты r_{1C} и φ_{1C} опорного тела m_1 в системе отсчета K_C ЦМ C и дополнительно одна полярная координата φ_{21} рабочего тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 опорного тела m_1 .

– Две полярные координаты r_{2C} и φ_{2C} опорного тела m_2 в системе отсчета K_C ЦМ C и дополнительно одна полярная координата φ_{12} рабочего тела m_1 в собственной системе отсчета K_2 опорного тела m_2 .

Полярные координаты φ_{12} и φ_{21} рассматриваемой замкнутой МС2 кинематически зависимы $\varphi_{12} = \varphi_{21} + \pi$ (рис. 1, а). Для такой кинематической зависимости выполняется требование к динамической само согласованности $\vec{\Phi}_{12} + \vec{\Phi}_{21} = 0$ рассматриваемой замкнутой МС2, что важно когда реакции $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ связи R ее тел m_1 и m_2 будут заменены на их относительные силы инерции $\vec{R}_{21} \Rightarrow \vec{\Phi}_{21}$ и $\vec{R}_{12} \Rightarrow \vec{\Phi}_{12}$.

Таким образом, общее число независимых обобщенных координат для описания плоского переносно-относительного поступательного движения тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K составляет $N=5$ и соответствует числу ее степеней свободы $s=3n-l=3 \cdot 2-1=5$, где $n=2$ – количество тел m_1 и m_2 МС2, которые в несвязанном состоянии имеют по три степени свободы в системе отсчета K ; $l=1$ – одна кинематическая шарнирно-стержневая связь R .

Шарниры сами по себе не добавляют новых независимых ограничений сверх условия постоянства длины $R = \text{const}$ стержня (они лишь реализуют кинематическую возможность поворота вокруг их осей). Количество обобщенных координат $N = 5$ определяет полную энергию E МС2 в системе отсчета K , которая включает в себя как кинетическую энергию T_{er} переносно-относительного поступательного движения тел m_1 и m_2 , так и входящий в нее перекрестный член U от их двух сложных переносно-относительных поступательных движений [3].

Для выбранных обобщенных координат движение тел m_1 и m_2 МС2 характеризуется следующими импульсами:

- Собственный импульс $\vec{p}_{ic} = m_i \vec{v}_{ic}; i = 1, 2$ тела m_i . Это импульс, характеризующий движения этого тела вместе с собственной системой отсчета K_i в системе отсчета K_C , где $\vec{v}_{ic} = \vec{\omega}_{ic} \times \vec{r}_{ic}$ – скорость тела m_i в системе отсчета K_C ; $\vec{\omega}_{ic} = \vec{\omega}_C$ и $\vec{r}_{ic}$ – его угловая скорость и радиус-вектор (2) поступательного движения этого тела в системе отсчета K_C по траектории в виде окружности $s_i; i = 1, 2$ (рис. 1, а).

- Относительный импульс $\vec{p}_{ij} = m_i \vec{v}_{ij}; i, j = 1, 2; i \neq j$ тела m_i . Это импульс, характеризующий движение этого тела по траектории s_{ij} в собственной системе отсчета K_j диаметрально противоположного тела m_j , где $\vec{v}_{ij} = \vec{\omega}_{ij} \times \vec{r}_{ij}$ – относительная скорость тела m_i в системе отсчета K_j ; $\vec{\omega}_{ij}$ и $\vec{r}_{ij}$ – его угловая скорость и радиус-вектор поступательного движения этого тела в системе отсчета K_j .

- Переносный импульс $\vec{p}_{ie} = m_i \vec{v}_{ie}; i = 1, 2$ тела m_i . Это импульс, характеризующий движение этого тела вместе с системой отсчета K_j диаметрально противоположного тела m_j , где $\vec{v}_{ie} = \vec{v}_{jc} = \vec{\omega}_{jc} \times \vec{r}_{jc}$ – переносная скорость тела m_i вместе с собственной системой отсчета K_j диаметрально противоположного тела m_j , выраженная через его собственную скорость $\vec{v}_{jc} = \vec{\omega}_{jc} \times \vec{r}_{jc}$ в системе отсчета K_C .

Установим связь между собственными $\vec{p}_{ic} = m_i \vec{v}_{ic}; i = 1, 2$, относительными $\vec{p}_{ij} = m_i \vec{v}_{ij}; i, j = 1, 2; i \neq j$ и переносными $\vec{p}_{ie} = m_i \vec{v}_{ie}; i = 1, 2$ импульсами тел m_1 и m_2 для их начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$, которая удовлетворяет сохранности импульса $\vec{p}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ рассматриваемой замкнутой МС2.

Так как тела m_1 и m_2 связаны кинематической шарнирно-стержневой связью R , то для их начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ (рис. 1, а) при мгновенной передаче взаимодействий их распределение в системе отсчета K_C будет диаметрально

$$\theta_C = \arccos(p_1(0)/p_2(0)) = -\pi, \quad (3)$$

что соответствует представлениям оптимального периодического движения [6, 7] для замкнутой МС2 [3, 4], где θ_C – угол запаздывания фазы $\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \theta_C = \varphi_{21} - \pi$ поступательного движения тела m_1 в системе отсчета K_C относительно фазы φ_{21} поступательного движения тела m_2 в собственной системе отсчета K_1 тела m_1 (рис. 1, а).

Для МС2 с пятью степенями свободы $s = 5$ при мгновенной передаче абсолютно упругого взаимодействия каждый из начальных импульсов $\vec{p}_i(0) = (0, 1); i = 1, 2$ ее тел m_i в равных частях распределится между его относительным $\vec{p}_{ij}; i, j = 1, 2; i \neq j$ и собственным $\vec{p}_{iC}; i = 1, 2$ импульсами, так, что при $m_1 = m_2$ относительная и переносная скорости будут равны $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_{iC}$, как для тела m_2 показано на рисунке 1, б. Величины их модулей $v_{12} = v_{1C}$ и $v_{21} = v_{2C}$ будут определены исходя из закона сохранения кинетической энергии МС2 при анализе ее энергетического баланса. Скорость $\vec{v}_C$ ЦМ C в системе отсчета K будет равна $\vec{v}_C = (\vec{p}_1(0) + \vec{p}_2(0)) / m = 0$, как показано на рисунке 1, б. В результате приобретения импульсов $\vec{p}_{ij}$ и $\vec{p}_{iC}$ тела m_1 и m_2 МС2 начнут совершать в системе отсчета K сложное плоское переносно-относительное поступательное движение с абсолютными скоростями:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{ie} + \vec{v}_{ij}; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (4)$$

где $\vec{v}_{ie} = \vec{v}_{jC} = \vec{\omega}_{jC} \times \vec{r}_{jC}$ и $\vec{v}_{ij} = \vec{\omega}_{ij} \times \vec{r}_{ij}$ – переносная скорость тела m_i вместе с собственной системой отсчета K_j диаметрально противоположного тела m_j и его относительная скорость в этой системе отсчета.

Из определения

$$m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = m_1(\vec{v}_{1e} + \vec{v}_{12}) + m_2(\vec{v}_{2e} + \vec{v}_{21}) = \vec{p}_1(0) + \vec{p}_2(0) = 0, \quad (5)$$

которое получено с учетом абсолютных скоростей $\vec{v}_i$ (4), следует, что для начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ тел m_1 и m_2 скорость $\vec{v}_C$ их ЦМ C равна нулю $\vec{v}_C = 0$.

Определение (5) дает связь переносных $\vec{p}_{ie} = m_i \vec{v}_{ie} = m_i \vec{v}_{jC}$ и относительных $\vec{p}_{ij} = m_i \vec{v}_{ij} = m_i \vec{\omega}_{ij} \times \vec{r}_{ij}; i, j = 1, 2; i \neq j$ импульсов равенствами:

$$\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{12} = 0; \vec{p}_{2e} + \vec{p}_{21} = 0. \quad (6)$$

Переносные импульсы $\vec{p}_{ie} = m_i \vec{v}_{ie} = m_i \vec{v}_{jC}; i, j = 1, 2; i \neq j$ с учетом определения $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ для ЦМ C дают аналогичное равенство

$$\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{2e} = 0. \quad (7)$$

Тогда из определения (5) следует, что

$$\vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = 0 \quad (8)$$

Согласно (6-8) распределение импульсов рассматриваемой замкнутой МС2 удовлетворяет равенствам

$$\vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{2C}; \vec{p}_{1C} = -\vec{p}_{21}; \vec{p}_{2C} = -\vec{p}_{12}; \vec{p}_{12} = -\vec{p}_{21}, \quad (9)$$

которое обеспечивают сохранность ее импульса

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{21} = \overrightarrow{\text{const}} = 0, \quad (10)$$

при $\vec{v}_C = 0$ (5). Равенства (9) будут использованы в анализе энергетического баланса МС2 для двух наборов начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ и $\vec{p}_1(0) = 0, \vec{p}_2(0) = (0,1)$ ее тел m_1 и m_2 .

Равенства (6) при $m_1 = m_2$ обращают в нуль суммы переносных $\vec{v}_{ie}$ и относительных $\vec{v}_{ij}$ скоростей $\vec{v}_{1e} + \vec{v}_{12} = 0$ и $\vec{v}_{2e} + \vec{v}_{21} = 0$, что согласуется с (5) и, следовательно, дают нулевую абсолютную скорость $\vec{v}_i = 0$ (4) каждого из тел m_i в системе отсчета K . Но так как в отдельности переносные $\vec{v}_{ie}$ и относительные $\vec{v}_{ij}$ скорости тел m_i не являются нулевыми, то они однозначным образом определяют кинетическую T_{er} и полную энергии E МС2 в системе отсчета K , что будет использовано при их определении через абсолютную нулевую скорость $\vec{v}_i$ (4).

Временно ограничим число возможных степеней свободы рассматриваемой замкнутой МС2 до двух $s = 2$, например, по декартовой координате x_i опорного тела $m_i; i = 1, 2$ в системе отсчета K и полярной координате $\varphi_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$ рабочего тела m_j в собственной системе отсчета K_i опорного тела m_i . Тогда реакцию $\vec{R}_{ji}$ кинематической шарнирно-стержневой связи R , приложенную к любому из выбираемых опорных тел m_i , можно заменить на относительную силу инерции $\vec{R}_{ji} = \vec{\Phi}_{ji} = m_j \omega_{ji}^2 \vec{r}_{ji}$ условно отброшенного рабочего тела m_j (что будет в последующем математически обосновано на примере МС2 с $s = 2$). В результате из (1) получим уравнение динамики для любого из выбираемых опорных тел m_i замкнутой МС2 с $s = 2$ и $\vec{F}_i = 0$ в виде принципа Д'Аламбера или второго закона Ньютона в поле относительной силы инерции отброшенного рабочего тела m_j :

$$\vec{\Phi}_i + \vec{\Phi}_{ji} = 0; m_i \vec{a}_i = \vec{\Phi}_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j, \quad (11)$$

которые не содержат неизвестных реакций $\vec{R}_{ji}$ (1) кинематической шарнирно-стержневой связи R , где $\vec{a}_i$ – абсолютное ускорение опорного тела m_i в лабораторной системе отсчета K .

Определим вид относительных сил инерции $\vec{\Phi}_{ji}$ (11) для замкнутой МС2 с $N = s = 5$, показанной на рисунке 1, a , когда ее тела m_1 и m_2 совершают сложное плоское переносно-относительного поступательного движения в

системе отсчета K . Для этого, с учетом абсолютных скоростей $\vec{v}_i$ (4) выразим суммарную кинетическую энергию такого сложного плоского движения одновременно ее двух тел m_1 и m_2 в виде [3]

$$T_{er} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (12)$$

где U – перекрестный член переносно-относительного движения, который в терминологии работы [5] является обобщенным кинетическим потенциалом:

$$U = m_1 v_{1e} v_{12} \cos \theta_C + m_2 v_{2e} v_{21} \cos \theta_C = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21}), \quad (13)$$

характеризующим вклад относительного $\vec{v}_{12r}, \vec{v}_{21r}$ движения тел m_1 и m_2 в их

переносное движение $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}, \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$; где $\theta_C = \angle \vec{v}_{2e} \vec{v}_{21} = -\pi$ – угол между векторами переносной $\vec{v}_{2e}$ и относительной $\vec{v}_{21}$ скоростей (рис. 1, а).

Сумма первого и второго слагаемых, входящих в T_{er} (12), является кинетической энергией T_{Ce} переносного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K так как с учетом абсолютных скоростей $\vec{v}_i$ (4) характеризует переносный импульс

$$\vec{p}_{Ce} = (m_1 + m_2) \vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_{1e} + m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{2e} + m_2 \vec{v}_{21} = m_1 \vec{v}_{1e} + m_2 \vec{v}_{2e} \text{ МС2 как единого целого.}$$

Сумма кинетической энергии T_{Ce} с учетом перестановки $m_1 \Leftrightarrow m_2$, справедливой для равных масс $m_1 = m_2$, удовлетворяет равенству

$$T_{Ce} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2C}^2, \quad (14)$$

выраженному через переносные импульсами $\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{1e} = m_1 \vec{v}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{2e} = m_2 \vec{v}_{1C}$ тел m_1 и m_2 вместе с собственными системами отсчета K_2 и K_1 диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 .

Сумма третьего и четвертого слагаемых кинетической энергии T_{er} (12) является кинетической энергией $T_r = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2$ относительного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 и тела m_2 в системе отсчета K_1 .

Потенциал U (13) определяет относительные силы инерции тел m_1 и m_2 для их сложного переносно-относительного поступательного движения:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{2C}} \cdot \vec{r}_{2C}^0 = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{1C}^0; \\ \vec{F}_{2C} &= -\frac{\partial U}{\partial r_{1C}} \cdot \vec{r}_{1C}^0 = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{2C}^0, \end{aligned} \quad (15)$$

которые с учетом равенства (14) действуют на диаметрально противоположные тела m_2 и m_1 в системе отсчета K [3, 4], где $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$ и $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$ – единичные векторы противоположно направленные радиус-векторам $\vec{r}_{2C}$ и $\vec{r}_{1C}$

(2) и задающие направление относительных сил инерции $\vec{F}_{1C}$ и $\vec{F}_{2C}$ к ЦМ C (см. рис. 1, *a*).

Внутренними импульсами, учитывающими тепловое движение молекул, вращение атомов в кристаллической решётке тел MC_2 и их стержне в кинетической энергии MC_2 не учитываются, так как они из-за их малого вклада оказывают предельно малое влияние на движение её ЦМ C .

Таким образом, в математическом разложении кинетической энергии T_{er} (12) на переносную T_{Ce} и относительную T_r составляющие с их перекрестным членом в виде кинетического потенциала U (13) имеют различный физический смысл, так как выражены через переносные $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}$, $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ и относительные $\vec{v}_{12}$, $\vec{v}_{21}$ скорости тел m_1 и m_2 MC_2 , так, что при их суммировании один и тот же импульс этих тел не учитывается более одного раза.

Угловые скорости $\omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_C$ движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C и их угловые скорости ω_{12} и ω_{21} в собственных системах отсчета K_1 и K_2 диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 , входящие в (15), в соответствии с равенствами $p_{1C} = p_{12}$ и $p_{2C} = p_{21}$ (6) и использованием радиусов r_{1C} и r_{2C} (2) выразим в виде [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned}\omega_C &= \omega_{1C} = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21}; \\ \omega_{12} &= \frac{m_2 \omega_C}{m_1 + m_2}; \quad \omega_{21} = \frac{m_1 \omega_C}{m_1 + m_2}.\end{aligned}\tag{16}$$

Исходя из кинематической реализуемости движения тел m_1 и m_2 MC_2 без ее разрушения, необходимо, чтобы угловые перемещения этих тел в системах отсчета K , K_C , K_1 и K_2 являлись инвариантом

$$\Delta\varphi = \omega_C \Delta t_C = \omega_{12} \Delta t_2 = \omega_{21} \Delta t_1,\tag{17}$$

где $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_0$ и $\Delta t_C = t_C - t_0$ – приращение времени; t_0 – единое начальное время во всех системах отсчета; t_1 и t_2 – собственное время в системах отсчета K_1 и K_2 ; t_C – собственное время в системе отсчета K_C , которое является абсолютным $t_C = t$ по отношению к времени t в системе отсчета K .

Физически инвариант $\Delta\varphi$ (17) характеризует то, что при любом угловом перемещении $\Delta\varphi = \{0; \pi/2\}$ тела m_2 в системах отсчета K_1 и K_C (что также справедливо и для тела m_1 в системах отсчета K_2 и K_C) это тело будет находиться в одной и той же точке траектории $s_{1,2}$ системы отсчета K как, например, для этого тела показано на рисунке 1, *б* событиями e_1 и e_2 . Другими словами он определяет то, что для угловых скоростей ω_{21} и ω_{12} (16) в системах отсчета K_1 и K_2 , отличных от угловой скорости ω_C в системе отсчета K_C , приращения времени Δt_C , Δt_1 и Δt_2 в этих системах должны быть разными. То есть в системе отсчета K_1 или K_2 , где угловая скорость ω_{21} или ω_{12} (16) выше ω_C , собственное время t_1 или t_2 течёт медленнее (интервалы между событиями длиннее), и наоборот. Поэтому тактовые частоты в системах отсчета K_1 и K_2 ,

из-за разных угловых скоростей ω_{21} и ω_{12} , определяются через собственное время t_1 и t_2 . Поскольку в системах отсчёта K_1 и K_2 собственные времена t_1 и t_2 разные, то и наблюдаемые тактовые частоты этого процесса в этих системах тоже будут различаться. При этом важно отметить, что для рассматриваемой модели МС2 не вводится релятивистское замедление времени (как в специальной теории относительности Эйнштейна [8]). Она работает в рамках классической механики, но учитывает, что при относительном движении частей МС2 (вращении) само понятие локальности времени для систем отсчета K_1 и K_2 по отношению к времени $t_C = t$ в системе отсчета K_C выводится на основе угловых координат $\varphi_C = \omega_C t_C$; $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$ и $\varphi_{12} = \omega_{12} t_2$, связанных с временем t_C , t_1 и t_2 в системах отсчета K_C , K_1 и K_2 через кинематику МС2 – угловые скорости ω_C , ω_{21} и ω_{12} , а не постулируется на действующей модели часов.

Из инварианта $\Delta\varphi$ (17) можно определить собственное время t_1 и t_2 в системах отсчета K_1 и K_2

$$t_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} t_C; \quad t_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} t_C, \quad (18)$$

где время t_C в системе отсчета K_C является абсолютным $t_C = t$.

С учетом относительных сил инерции $\vec{F}_{1C}$ и $\vec{F}_{2C}$ (15) принцип Д'Аламбера и второй закон Ньютона (11) тел для m_1 и m_2 рассматриваемой замкнутой МС2 примут вид:

$$\vec{\Phi}_i + \vec{F}_{jC} = 0; \quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{jC}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \quad (19)$$

Первое уравнение (19) характеризует равновесие тела m_i в лабораторной системе отсчета K при равномерном движении по геодезической траектории s_i , второе – его динамику в этой же системе отсчета K .

Относительные силы инерции $F_{jC} = m_j \omega_{iC} \omega_{ji} r_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$ в уравнениях (19) по размерности совпадают с относительными силами инерции $\vec{\Phi}_{ji} = -m_j \omega_j^2 r_{ji}; i, j = 1, 2; i \neq j$ уравнений (11). Они действуют через связь R на диаметрально противоположные тела m_i и образуют инерционный домен (ИД) [3, 4], который исключает из принципа Д'Аламбера (1) неизвестные реакции $\vec{R}_{ji}$ (1) этой связи R оставляя принцип Д'Аламбера (1) и уравнения динамики (11) и (19) инвариантными в неподвижной лабораторной системе отсчета K , так как взаимодействие тел m_i и m_j посредством реакций $\vec{R}_{ji}$ связи R и относительными силами инерции $\vec{\Phi}_{ji}$ и $\vec{F}_{jC}$ эквивалентно. При этом в соответствии с эквивалентностью гравитационной и инертной масс [8] поле инерционного домена можно рассматривать как центральное динамическое силовое поле притяжения, действующее на МС2 эквивалентно внешнему.

В модель MC2, представленную уравнениями (19) реакции $\vec{R}_{ji}$ связи R и третий закон Ньютона явно не входят. Она построена не через геометрию жесткого стержня R как таковую, а через дополнительные динамические допущения о характере распределения суммарного импульса и фазовые соотношения. В такой модели MC2 передача импульса между ее телами осуществляется посредством действия относительных сил инерции $\vec{F}_{jc}$ (19). То есть механизм перераспределения состоит в действии относительной силы инерции $\vec{F}_{jc}$ рабочего тела m_j через связь R на опорное тело m_i .

При этом модель MC2 построена при следующих ключевых допущениях:

– Передача импульса от рабочего тела m_j опорному телу m_i с большей массой осуществляется посредством силы инерции $\vec{F}_{jc}$ рабочего тел m_j . Это заменяет «мгновенность» в классическом смысле на управляемое перераспределение, которое можно описать как мгновенное в рамках предложенной модели MC2 с конкретным распределением ее суммарного импульса $\vec{p}_C$ (10).

– Для сохранения суммарного импульса $\vec{p}_C = \overline{\text{const}}$ замкнутой MC2 вводится условие, что фазы взаимодействующих тел в системе отсчета их центра масс сдвинуты на угол $\theta_C = -\pi$ (3). Это не просто кинематика, а динамическое условие, которое фактически задаёт следующее правило: для любого начального распределения импульсов замкнутая MC2 мгновенно стремится обеспечить фазовое условие $\theta_C = -\pi$, что эквивалентно мгновенному перераспределению в рамках ее принятой модели.

С точки зрения классической механики, введение мгновенного перераспределения импульса через фазовые условия и относительные силы инерции – это дополнительные постулаты, а не следствия из стандартных уравнений классической механики. Именно эти постулаты и делают предлагаемую модель MC2 внутренне согласованной в её собственной логике, но одновременно выводят её за пределы традиционного подхода.

Замена в (12) $T_{ce} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2e}^2$ на $T_{ce} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2c}^2$ в соответствии с равенством (14) при учете того, что внешняя потенциальная энергия рассматриваемой замкнутой MC2 равна нулю $\Pi = 0$ дает ее лагранжиан

$$\begin{aligned} L = T_{er} &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2c}^2 + \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega_{1c}^2 r_{1c}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{2c}^2 r_{2c}^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_{12}^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_{21}^2 r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1\omega_{2c}r_{2c}\omega_{12}r_{12} + m_2\omega_{1c}r_{1c}\omega_{21}r_{21}) \end{aligned} \quad (20)$$

в системе отсчета K при $m_1 = m_2$.

Частные дифференциалы от функции Лагранжа L (20) вида $-\frac{\partial L}{\partial r_{1C}} = 0$ и $-\frac{\partial L}{\partial r_{2C}} = 0$ дают обобщенные силы

$$\begin{aligned} -m_1 \omega_{1C}^2 r_{1C} + m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} &= 0; \\ -m_2 \omega_{2C}^2 r_{2C} + m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

в виде принципа Д'Аламбера (19) в криволинейных координатах, в поле относительных сил инерции $\vec{F}_{jC}$, что устанавливает их эквивалентность реакциям $\vec{R}_{ij}$.

И действительно первые слагаемые (21) определяют собственные силы инерции $\vec{\Phi}_1 = \vec{\Phi}_{1C} = -m_1 \omega_{1C}^2 \vec{r}_{1C}$ и $\vec{\Phi}_2 = \vec{\Phi}_{2C} = -m_2 \omega_{2C}^2 \vec{r}_{2C}$ тел m_1 и m_2 (рис. 1, а), которые направлены от ЦМ C .

Вторые слагаемые определяют относительные силы инерции $\vec{F}_{2C} = m_2 \omega_{1C} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{2C}^0$ и $\vec{F}_{1C} = m_1 \omega_{2C} \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{1C}^0$ тел m_2 и m_1 от их сложного переносно-относительного поступательного движения, где выбор направления единичных векторов $\vec{r}_{1C}^0 = -\vec{r}_{2C} / r_{2C}$ и $\vec{r}_{2C}^0 = -\vec{r}_{1C} / r_{1C}$ к ЦМ C (рис. 1, а) определен тем, что силам $\vec{F}_{2C}$ и $\vec{F}_{1C}$ противодействуют собственные силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ тел m_1 и m_2 (21).

Уравнения (19), выраженные через относительные силы инерции $\vec{F}_{1C}$ и $\vec{F}_{2C}$ (15), позволяют анализировать динамику каждого из тел m_1 и m_2 МС2 в отдельности без учета неизвестных реакций $\vec{R}_{ji}$ (1) их связи R . Так как эти силы образуют уравновешенную систему сил $\vec{F}_{1C} + \vec{F}_{2C} = 0$, то их действие на рассматриваемую замкнутую МС2 удовлетворяет сохранности ее импульса $\vec{p}_C = \text{const}$.

Повторим вывод уравнений динамики (19) рассматриваемой МС2 для начальных импульсов ее тел m_1 и m_2 , равных $\vec{p}_1(0) = 0$ и $\vec{p}_2(0) = (0, 1)$, как показано на рисунке 2, а.

Для МС2 с пятью степенями свободы $s = 5$ начальный импульс $\vec{p}_2(0) = (0, 1)$ в момент времени $t = 0$ мгновенно перераспределится между ее телами m_1 и m_2 и импульсом ее ЦМ C так, что переносные $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2C}$, $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1C}$ и относительные $\vec{v}_{21}, \vec{v}_{12}$ скорости ее тел m_1 и m_2 будут равны между собой $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1C}$, $\vec{v}_{21} = \vec{v}_{2C}$ (рис. 2, б). Их модули $v_{12} = v_{1C}$, $v_{21} = v_{2C}$ будут определены исходя из закона сохранения энергии замкнутой МС2 при анализе ее энергетического баланса. Скорость $\vec{v}_C$ ЦМ C в системе отсчета K будет равна

$\vec{v}_C = p_2(0)/m$, как показано на рисунке 2, а. В результате приобретения импульсов $\vec{p}_{ij}$ и $\vec{p}_{iC}$ тела m_1 и m_2 начнут совершать по отношению к системе отсчета K_C сложное переносно-относительное движение по окружности $s_{1,2C}$ (рис. 2, б), которое из-за одновременного прямолинейного и равномерного движения ЦМ C этих тел в системе отсчета K будет совершаться по спиральным траекториям (на рис. 2 не показаны).

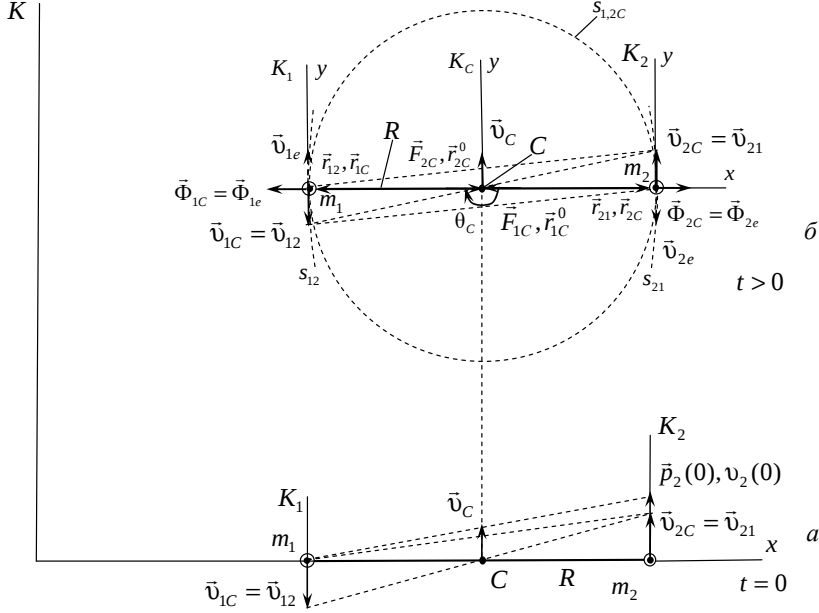


Рис. 2. Кинематика MC2 для начальных импульсов ее тел m_1 и m_2 , равных $\vec{p}_1(0) = 0$ и $\vec{p}_2(0) = (0,1)$

Исходя из определения

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_{1e} + m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{2e} + m_2 \vec{v}_{21}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_{1e} + m_2 \vec{v}_{2e}}{m_1 + m_2}, \quad (22)$$

полученного с учетом абсолютных скоростей $\vec{v}_i$ (4) движение ЦМ C можно рассматривать как переносное $\vec{v}_C \equiv \vec{v}_{Ce}$.

Тогда переносные скорости тел $\vec{v}_{ie}$ m_1 и m_2 есть сумма

$$\vec{v}_{ie,abs} = \vec{v}_C + \vec{v}_{ie}, i = 1, 2, \quad (23)$$

перекрестные члены которой, при возведении ее в квадрат, обращаются в нуль

$$m_1 \vec{v}_C \cdot (\vec{\omega}_C \times \vec{r}_{1C}) + m_2 \vec{v}_C \cdot (\vec{\omega}_C \times \vec{r}_{2C}) = \vec{v}_C \cdot (\vec{\omega}_C \times (m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C})) = 0. \quad (24)$$

Замена переносной скорости $\vec{v}_{ie}$ в (12) на $\vec{v}_{ie,abs}$ (23) преобразует кинетическую энергию T_{er} MC2 к виду

$$T_{er} = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U, \quad (25)$$

где $T_C = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2$ – кинетическая энергия прямолинейного равномерного движения ЦМ C в системе отсчета K со скоростью $\vec{v}_C$ (рис. 2, б).

Кинетическая энергия (25) отличается от кинетической энергии по Кёнигу содержанием в ней члена $T_e = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2$ переносной кинетической энергии, а также обобщенного кинетического потенциала $U = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21})$, который определяет относительные силы инерции $\vec{F}_{1C}$ и $\vec{F}_{2C}$ (15).

Исходя из принципа относительности Галилея при $\vec{p}_C = \overrightarrow{\text{const}}$ член T_C в (25) при составлении лагранжиана рассматриваемой МС2 может быть отброшен. Тогда ее лагранжиан с учетом перестановки масс $m_1 \leftrightarrow m_2$ (14), допустимой при $m_1 = m_2$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} L = T_{er} &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 + U = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \omega_{2C}^2 r_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{1C}^2 r_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega_{12}^2 r_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 r_{21}^2 - \\ &\quad - (m_1 \omega_{2C} r_{2C} \omega_{12} r_{12} + m_2 \omega_{1C} r_{1C} \omega_{21} r_{21}), \end{aligned} \quad (26)$$

совпадающим с (20).

Из лагранжиана L (26) можно определить относительные силы инерции $\vec{F}_{1C}$ и $\vec{F}_{2C}$ (15), а также уравнения движения тел каждого из m_1 и m_2 МС2 в виде (19).

Уравнения динамики МС2 с числом степеней свободы $s = 2$ в диссипативной среде

Абсолютные импульсы опорного и рабочего тел m_1 и m_2 МС2 при $m_1 > m_2$ в системе отсчета K , выраженные через их декартовы координаты:

$$x_1 = x_1 \text{ и } x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}, \quad (27)$$

можно представить в виде [3, 4]:

$$p_{1x} = m_1 \frac{d}{dt} x_1; \quad p_{2x} = m_2 \frac{d}{dt} x_2 = m_2 \frac{d}{dt} x_1 + m_2 \frac{d}{dt} R \cos \varphi_{21}. \quad (28)$$

В качестве обобщенных независимых координат МС2 примем декартову координату x_1 опорного тела m_1 , движущегося по оси x системы отсчета K , и полярную координату $\varphi_{21} = \omega_{21} t_1$ рабочего тела m_2 совершающего вращательное движение относительно опорного тела m_1 в его собственной системе отсчета K_1 в которой время t_1 согласно (16) и (17) при $\omega_{12} = 0$ является абсолютным $t_1 = t_C = t$, где относительная скорость $\omega_{21} = \text{const}$, которая поддерживается постоянной внутренней активной парой сил [3, 4].

Тогда абсолютный импульс МС2 можно определить в виде

$$p_x = \sum_i p_{ix} = p_{Cx} + p_{21x} = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} x_1 + m_2 \frac{d}{dt} R \cos \varphi_{21}. \quad (29)$$

Он складывается из собственного импульса МС2 опорного тела m_1 с приведенной массой $m = m_1 + m_2$, которое вместе с собственной системой отсчета K_1 совершает абсолютное движение в системе отсчета K и относительного импульса рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1

$$p_{Cx} = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} x_1, \quad p_{21x} = m_2 \frac{d}{dt} R \cos \varphi_{21}. \quad (30)$$

Используя импульсы p_{1x} и p_{2x} (28) с учетом аксиомы связи для несвободной материальной точки и диссипативной силы

$$F_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1, \quad (31)$$

действующей на опорное тело m_1 , которое движется по оси x системы отсчета K со скоростью $\dot{x}_1$, второй закон Ньютона отдельно для каждого из взаимодействующих тел m_1 и m_2 можно выразить в виде:

$$dp_{1x} / dt = X_{12} + \vec{F}_1; \quad dp_{2x} / dt = X_{21}, \quad (32)$$

где $X_{12} = -X_{21}$ – проекции реакций $\vec{R}_{ij}$ связи R тел m_1 и m_2 на ось x системы отсчета K , удовлетворяющие третьему закону Ньютона [1].

Суммирование левых и правых частей уравнений (32) с учетом того, что $\sum_{i,j=1,2; i \neq j} X_{ij} = 0$ дает принцип Д'Аламбера и второй закон Ньютона

$$\Phi_{1x} + \Phi_{21x} + F_{1x} = 0; \quad m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \Phi_{21x} + \vec{F}_{1x}, \quad (33)$$

в форме (11) в системе отсчета K для диссипативной внешней среды, где

$$\Phi_{1x} = -\frac{dp_{Cx}}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \text{собственная сила инерции опорного тела } m_1 \text{ с}$$

$$\begin{aligned} \text{приведенной} \quad \text{массой} \quad m = m_1 + m_2; \quad \Phi_{21x} = -\frac{dp_{21x}}{dt} = -m_2 \frac{d^2 R \cos \varphi_{21}}{dt^2} = \\ = m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21} - \text{собственная сила инерции рабочего тела } m_2 \text{ в системе отсчета } K_1. \end{aligned}$$

Уравнения (33) выражены, через относительную силу инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 и могут быть получены непосредственно из Лагранжиана МС2, записанного относительно декартовой координаты $x_1 = f(\varphi_{21})$, который не содержит реакций $\vec{R}_{ij}$ связи R [3], что устанавливает эквивалентность реакций $\vec{R}_{ij}$ связи R и относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 . Также уравнения (33) показывают, что при $m_1 \neq m_2$ МС2 сводится к одному телу с массой $m = m_1 + m_2$ с $s \leq 3$ степенями свободы, совершающего движение

в диссипативной среде в поле относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ по прямолинейной траектории.

Решение неоднородного дифференциального уравнения в виде второго закона Ньютона (33) было найдено в работах [3, 4] для начальных импульсов тел m_1 и m_2 МС2 равных $\vec{p}_1 = 0$ и $\vec{p}_2 = (0,1)$. Оно является суммой общего решения однородного уравнения (33) (при обнулении его правой части) и частного решения этого неоднородного уравнения.

Общее решение характеризует переходной процесс, происходящий в МС2 в начале ее движения, а по его завершению определяет положение x_O силового центра О ИД МС2 на оси x системы отсчета K .

Частное решение описывает стационарное линейное гармоническое колебание опорного тела m_1 с приведенной массой $m = m_1 + m_2$ параллельно оси x системы отсчета K в окрестности силового центра О ИД:

$$x_{10} = A_1 \cos \varphi_{10} = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \varepsilon), \quad (34)$$

где

$$A_1 = a / \sqrt{1 + \xi^2}; \quad \varphi = \theta_c + \varepsilon = -\pi + \varepsilon; \quad \varepsilon = \arctg \xi; \quad (35)$$

$\varphi_{10} = \varphi_{21} + \varphi$ и A_1 – фаза и амплитуда линейного гармонического колебания опорного тела m_1 ; $\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{21}$ – угол запаздывания фазы φ_{10} линейного гармонического колебания опорного тела m_1 относительно фазы φ_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 с учетом диссипативного угла ε , учитывающего вязкость внешней среды; $a = m_2 R / (m_1 + m_2)$ – амплитудный коэффициент; $\xi = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр; $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + m_2)]$ – коэффициент затухания движения опорного тела m_1 с приведенной массой $m = m_1 + m_2$; μ_1 – коэффициент линейного вязкого сопротивления внешней среды движению опорного тела m_1 .

Известная координата x_{10} (34) опорного тела m_1 и преобразования координат (27) обеспечивают определение координаты x_{20} рабочего тела m_2 в системе отсчета K_O , связанной с силовым центром О. Тогда координату x_{CO} ЦМ С МС2 в этой системе отсчета можно определить по формуле

$$x_{CO} = (m_1 x_{10} + m_2 x_{20}) / m, \quad (36)$$

где m_1 – действительная масса опорного тела m_1 .

Численный анализ энергетического баланса и минимума действия МС2

Замкнутая МС2, показанная на рисунке 1 и рисунке 2 имеет следующие собственные параметры: $m_1 = m_2 = 1$ кг; $R = 1$ м;

$$r_{1C} = m_2 R / (m_1 + m_2) = 0,5 \text{ м};$$

$$r_{2C} = m_1 R / (m_1 + m_2) = 0,5 \text{ м}.$$

1. Начальные условия и кинематические характеристики МС2 (рис. 1, а)

Модули начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ тел m_1 и m_2 составляют: $p_1(0) = m_1 v_1(0) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ и $p_2(0) = m_2 v_2(0) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, где $v_1(0) = 1 \text{ м/с}$ и $v_2(0) = 1 \text{ м/с}$ – модули скоростей тел m_1 и m_2 в системе отсчета K до начала их взаимодействия.

Кинетическая энергия T_{er} (12) МС2 для абсолютно упругого взаимодействия должна удовлетворять сохранению в виде

$$\frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1^2(0) + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2^2(0) = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{21}^2. \quad (37)$$

С учетом распределения импульсов МС2 (9) при $m_1 = m_2$ можно записать

$$v_{1C} = v_{2C} = v_{12} = v_{21}. \quad (38)$$

Тогда для начальных скоростей $v_1(0) = v_2(0) = 1 \text{ м/с}$ из (37) получим

$$v_{1C} = v_{12} = v_{2C} = v_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \text{ м/с}. \quad (39)$$

Кинематические характеристики МС2 после вступления ее тел m_1 и m_2 во взаимодействие (при $t > 0$): $\omega_{12} = \frac{v_{21}}{R} = 0,707 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{21} = \frac{v_{21}}{R} = 0,707 \text{ с}^{-1}$;

$$\omega_{1C} = \omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = 1,414 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{2C} = \omega_C = \omega_{12} + \omega_{21} = 1,414 \text{ с}^{-1} \text{ (рис. 1, а).}$$

Компоненты полной энергии МС2 в системе отсчета K :

$$T_e = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_C^2 r_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_C^2 r_{1C}^2 = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}; \quad (40)$$

$$T_r = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_{12}^2 R^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 R^2 = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}; \quad (41)$$

$$U = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21}) = \\ = -(m_1 \omega_C r_{2C} \omega_{12} R + m_2 \omega_C r_{1C} \omega_{21} R) = -1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}. \quad (42)$$

Баланс энергии МС2 для начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$ приведен в таблице 1.

Табл. 1. Баланс энергии МС2

Начальные условия	T_C	T_e	T_r	U	E_D	E
$\vec{p}_1(0) = -\vec{p}_2(0)$	0	0,5	0,5	-1	0	0
$\vec{p}_1(0) = 0; \vec{p}_2(0) = (0,1)$	0,25	0,125	0,125	-0,25	0	0,25

Так как кинетическая энергия $T_{er} = T_e + T_r = 1$ МС2 (табл. 1) равна начальной кинетической энергии $T_{er} = T(0) = m_1 v_1^2(0)/2 + m_2 v_2^2(0)/2 = 1$ ее тел m_1 и m_2 , то ее кинетическая сохраняется (37). Нулевая полная энергия МС2 $E = E_D = 0$, где $E_D = T_{er} + U$, характеризует, то что кинетическая энергия T_{er} тел

m_1 и m_2 периодически преобразуется в их обобщенный кинетический потенциал U и обратно. Так, например, по отношению к оси x (рис. 1, a) кинетический потенциал тел m_1 и m_2 $U = \max$, а их кинетическая энергия $T_{er} = \min$. При повороте тел на угол $\pi/2$ всё наоборот. Глобальный минимум полной энергии $E = E_D = 0$ МС2 соответствует минимуму действия $L = \min$ (20).

2. Начальные условия и кинематические характеристики МС2 (рис. 2, a)

Модули начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = 0$; $\vec{p}_2(0) = (0, 1)$ тел m_1 и m_2 составляют: $p_1(0) = 0$ и $p_2(0) = m_2 v_2(0) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, где $v_2(0) = 1 \text{ м/с}$ – модуль скорости тела m_2 в системе отсчета K до начала его взаимодействия с телом m_1 .

Кинетическая энергия T_{er} (12) МС2 для абсолютно упругого взаимодействия должна удовлетворять сохранению в виде

$$\frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2(0) - \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_C^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2. \quad (43)$$

С учетом распределения импульсов МС2 (9) при $m_1 = m_2$ можно записать $v_{1C} = v_{2C} = v_{12} = v_{21}$ (30). Тогда для начальной скорости $v_2(0) = 1 \text{ м/с}$ тела m_2 и скорости $v_C = \frac{m_2 v_2(0)}{m_1 + m_2} = 0,5 \text{ м/с}$ ЦМ C из (43) получим

$$v_{1C} = v_{12} = v_{2C} = v_{21} = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,354 \text{ м/с}. \quad (44)$$

Кинематические характеристики МС2 после вступления ее тел m_1 и m_2 во взаимодействие (при $t > 0$); $\omega_{12} = \frac{v_{12}}{2R} = 0,354 \text{ с}^{-1}$; $\omega_{21} = \frac{v_{21}}{2R} = 0,354 \text{ с}^{-1}$;

$$\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{12} + \omega_{21} = 0,708 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_C = \omega_{2C} = \omega_{12} + \omega_{21} = 0,708 \text{ с}^{-1} \text{ (рис. 2, а, б).}$$

Компоненты полной энергии МС2 в системе отсчета K :

$$T_C = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_C^2 = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}; \quad (45)$$

$$T_e = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_C^2 r_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_C^2 r_{1C}^2 = 0,125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}; \quad (46)$$

$$T_r = \frac{1}{2} m_1 v_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega_{12}^2 R^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 R^2 = 0,125 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}; \quad (47)$$

$$U = -(m_1 v_{2C} v_{12} + m_2 v_{1C} v_{21}) = \\ -(m_1 \omega_C r_{2C} \omega_{12} R + m_2 \omega_C r_{1C} \omega_{21} R) = -0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}. \quad (48)$$

Баланс энергии МС2 для начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = 0$ и $\vec{p}_2(0) = (0, 1)$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ее тел m_1 и m_2 приведен в таблице 1. Для таких начальных импульсов

кинетическая энергия МС2 содержит дополнительный член в виде кинетической энергии $T_C = (m_1 + m_2)v_C^2 / 2 = 0,25$ ее ЦМ С, зависящий от начальных условий $\vec{p}_1(0) = 0$; $\vec{p}_2(0) = (0,1)$, который, в виду того $\vec{p}_C = \overline{\text{const}}$, может быть отброшен. Тогда кинетическая энергия $T_{er} = T_e + T_r = 0,25$ МС2 (табл. 1) будет равна начальной кинетической энергии $T_{er} = T(0) = m_1 v^2(0) / 2 + m_2 v^2(0) / 2 - m_1 v_C^2 / 2$ ее тел m_1 и m_2 за вычетом этого отброшенного члена T_C , так что кинетическая энергия МС2 в виде (43) сохраняется. Полная энергия МС2 для начальных условий $\vec{p}_1(0) = 0$ и $\vec{p}_2(0) = (0,1)$ не равна нулю $E = T_C + E_D = 0,25$, где $E_D = T_{er} + U = 0$ – член, характеризующий, что кинетическая энергия T_{er} тел m_1 и m_2 периодически преобразуется в их обобщенный кинетический потенциал U и обратно. Так, например, по отношению к оси x (рис. 2, б) кинетический потенциал тел m_1 и m_2 $U = \max$, а их кинетическая энергия $T_{er} = \min$. При повороте тел на угол $\pi/2$ всё наоборот. Локальный минимум полной энергии $E = T_C + E_D = 0,25$ МС2 при $E_D = T_{er} + U = 0$ соответствует минимуму действия $L = \min$ (26).

Заключение

Таким образом, на основе принципа Д’Аламбера (1), записанного с учетом аксиомы связей для несвободной материальной точки, получены уравнения движения каждого из тел m_1 и m_2 замкнутой МС2, которые описывают их динамику в неподвижной лабораторной системе отсчета K в поле относительных сил инерции диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 . Полученные результаты распространены на случай их сложного переносно-относительного поступательного движения для замкнутой МС2 с пятью степенями свободы $s = 5$, а также на их движение для МС2 с двумя степенями свободы $s = 2$ в диссипативной среде.

Показано, что время $t_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} t_C$, $t_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} t_C$ в собственных

системах отсчета K_1 и K_2 взаимодействующих тел m_1 и m_2 по отношению системе отсчета K_C их ЦМ С для МС2 с пятью степенями свободы $s = 5$ относительно, тогда как время в системе отсчета K_C и в лабораторной системе отсчета K абсолютно $t_C = t$.

На основе составления лагранжиана замкнутой МС2 с пятью степенями свободы $s = 5$ показано, что ее движение в поле относительных сил инерции удовлетворяет законам сохранения импульса и энергии, а также минимуму действия при заданных начальных условиях.

Актуальность работы состоит в том, что она обеспечивает связь относительности кинематических величин (в том числе времени) с динамикой каждого из взаимодействующих тел m_i и m_j МС2 в неподвижной лабораторной системе отсчета K через структуру ее лагранжиана, который определяет

собственные $\vec{\Phi}_i$ и относительные $\vec{\Phi}_{ij}$, $\vec{F}_{iC}$ силы инерции ее тел m_i и m_j . Относительные $\vec{\Phi}_{ij}$, $\vec{F}_{iC}$ силы инерции взаимодействующих тел m_i и m_j являются эквивалентом реакции $\vec{R}_{ij}$ их связи R в принципе Д'Аламбера (1), определяющего уравнения динамики (11) и (19), что упрощает динамический анализ сложных механических систем.

Результаты работы могут найти практическое применение для синхронизации и динамического анализа сложных движений в робототехнике, проектировании устройств, обеспечивающих перемещение в среде с малой диссипацией [3, 4, 9], а также для синхронизации сложных орбитальных движений искусственных и естественных материальных тел в небесной механике при взаимодействии полем тяготения.

Список литературы

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Гулиа Н.В. Инерция: Предисловие А.Ю. Ишлинского. – М.: Наука. Серия Наука и технический прогресс, 1982. – 152 с.
3. Савелькаев С.В. Динамика механических систем в поле относительных сил инерции: монография. – Новосибирск: СГУТиТ, 2026. – 161 с.
4. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – №87. – С. 135-149. – DOI: 10.17223/19988621/87/11.
5. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. – М.: Наука, 1991. – Т. 1. – 496 с.
6. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – №3. – С. 168-176.
7. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, вып. 2. – С. 202-215.
8. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности // Сборник научных трудов в 4-х томах. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 563 с.
9. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды (эффект Савелькаева) // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – №4(17). – С. 42-48.

References

1. Nikitin N.N. Course in theoretical mechanics. – M.: Higher school, 1990. – 607 p.
2. Gulia N.V. Inertia: Preface by A.Yu. Ishlinsky. – M.: Science. Series Science and Technical Progress, 1982. – 152 p.
3. Savel'kaev S.V. Dynamics of mechanical systems in the field of relative inertial forces: monograph. – Novosibirsk: SSUGT, 2026. – 161 p.
4. Savel'kaev S.V. Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces // Bulletin of Tomsk State University.

- Mathematics and Mechanics. 2024, no. 87, pp. 135-149.
[dio.org/10.17223/19988621/87/11](https://doi.org/10.17223/19988621/87/11)
5. Saveliev I.V. Fundamentals of theoretical physics. Mechanics and electrodynamics. – M.: Science, 1991. – Vol. 1. – 496 p.
 6. Egorov A.G., Zakharova O.S. Energetically optimal motion of a vibrator in a medium with a hereditary law of resistance // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Control Theory and Systems. 2015, no. 3, pp. 168-176.
 7. Chernousko F.L. Optimal periodic motions of a two-mass system in a resisting medium // Applied Mathematics and Mechanics. 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 202-215.
 8. Einstein A. On the special and general theory of relativity // Collected scientific works in 4 volumes. – M.: Science, 1965. – Vol. 1. – 563 p.
 9. Savel'kaev S.V. Effect of independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from environmental dissipativity (Savel'kaev effect) // Mechanics of machines, mechanisms, and materials. 2011, no. 4(17), pp. 42-48.

Савелькаев Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии	Savel'kaev Sergey Viktorovich – doctor of technical sciences, associate professor, professor of the Department of special devices, innovations and metrology
sergei.savelkaev@yandex.ru	

Received 25.07.2026