

СТРУКТУРНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ: ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ ВИБРАЦИОННЫХ СТЕНДОВ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск,
Россия*

Ключевые слова: вибрационный стенд, резонанс, структурное математическое моделирование, двухмассовая система, передаточные функции, демпфирование, нормализация, безразмерная модель.

Аннотация. Рассматривается проблема формирования динамического качества вибрационных технологических машин резонансного типа. Используется методология структурного математического моделирования вибрационных машин на основе двухмассовой колебательной системы с вязким демпфированием. Для формирования режимов резонанса используются нормализованные амплитудно-частотные характеристики. Динамическое качество вибрационных взаимодействий строится с учетом существования узловых точек амплитудно-частотных характеристик, не зависящих от вязкого трения демпфера. Для рациональной оценки динамического качества введён коэффициент интенсивности. Выведены формулы значений динамических характеристик в зависимости от коэффициента интенсивности. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

STRUCTURAL MATHEMATICAL MODELING OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS: FORMATION OF THE DYNAMIC QUALITY OF RESONANCE MODES IN VIBRATION STANDS

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: vibration stand, resonance, structural mathematical modeling, two-mass system, transfer functions, damping, normalization, dimensionless model.

Abstract. The problem of forming the dynamic quality of vibration technological machines of the resonance type is considered. The methodology of structural mathematical modeling of a vibration machine based on a two-mass oscillatory system with viscous damping is used. Normalized amplitude-frequency characteristics are used to form resonance modes. The dynamic quality of vibration interactions is based on the existence of nodal points in the amplitude-frequency characteristics that do not depend on the viscous friction of the damper. To evaluate the dynamic quality rationally, the intensity coefficient is introduced. The formulas for the values of dynamic characteristics depending on the intensity coefficient are derived, and the results of computational experiments are presented.

Введение. Оптимизация резонансных режимов – одна из крупных проблем в области управления динамическим качеством работы вибрационных технологических машин. Двухмассовые механические колебательные системы широко применяются в структурном математическом моделировании динамических взаимодействий элементов вибрационной техники. Для определения оптимальных параметров классический подход использует

узловые точки амплитудно-частотных характеристик, приведенных к безразмерному виду. Классическим результатом оптимизации служат параметры системы, обеспечивающие так называемое «плато» амплитудно-частотной характеристики [1, 2]. Современное развитие вибрационной техники связано с активным развитием систем автоматического управления и регулирования, в частности, адаптивного управления динамическим качеством вибрационных процессов. Вместе с тем, классические результаты не содержат полной аналитической картины и готовых рецептов переноса на системы с несколькими степенями свободы. Цель работы – аналитический вывод полной системы амплитудно-частотных характеристик, главным образом, межпарциальных связей с учетом параметра дополнительной настройки динамического качества вибрационных взаимодействий.

I. Материалы и методы. Рассматривается механическая колебательная система с массами m_1 и m_2 , двумя пружинами с жесткостями k_1 , k_2 и демпфером с коэффициентов вязкого трения b_2 (рис. 1, а). В качестве обобщенных координат x_1, x_2 – используется отклонения сосредоточенных масс от положения статического равновесия. Внешнее гармоническое возмущение Q_1 приложено к основной массе m_1 . В рамках структурного подхода [3] механической колебательной системе может быть поставлена в соответствие эквивалентная в динамическом отношении структурная схема системы автоматического управления (рис. 1, б).

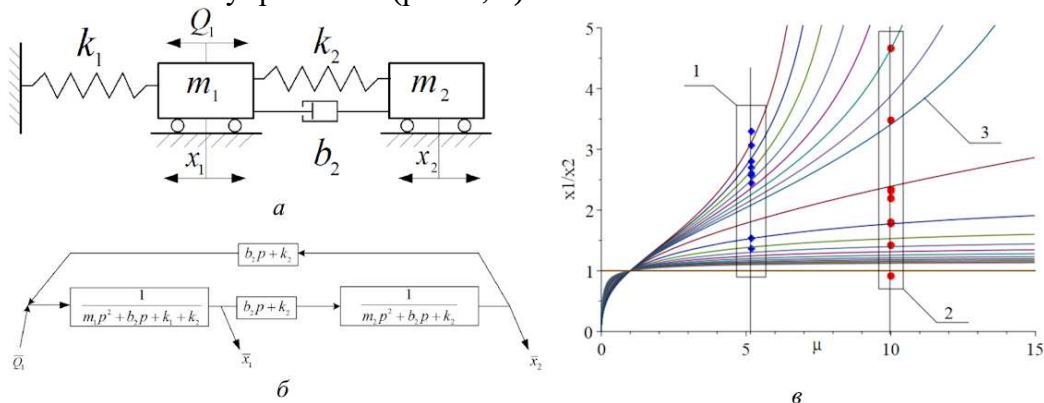


Рис. 1. Формирование оценки значений межпарциальных связей: а – расчетная схема; б – структурная схема, где “-” над символом обозначает интегральное преобразование Лапласа, $p = j\omega$ - комплексная переменная $j^2 = -1$; в – значение межпарциальной функции в зависимости от коэффициента массы для различных значений коэффициентов динамического качества, блок 1 – пример экспериментальных данных для массового соотношения в окрестности массового коэффициента $\mu = 5$, блок 2 – пример экспериментальных данных для массового соотношения $\mu = 10$

На основе структурной схемы строятся передаточные функции системы $W_1(p)$ и $W_2(p)$:

$$W_1(p) = \frac{\bar{x}_1}{Q_1} = \frac{m_2 p^2 + b_2 p + k_2}{A}, \quad W_2(p) = \frac{\bar{x}_2}{Q_1} = \frac{b_2 p + k_2}{A},$$

где $A=(m_1p^2+b_2p+k_1+k_2)(m_2p^2+b_2p+k_2)-(k_2+b_2p)^2$, а также передаточная функция межпарциальных связей:

$$W_{12}(p)=\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}=\frac{m_2p^2+b_2p+k_2}{b_2p+k_2},$$

которая оценивает рычажные связи в зависимости от частоты. Полученные передаточные функции могут быть приведены к безразмерному виду путем формальной замены:

$$\Omega_c=\sqrt{k_1/m_1}, \mu=\frac{m_2}{m_1}, f=\frac{\omega_a}{\Omega_c}, g=\frac{\omega}{\Omega_c}, \gamma=\frac{b_2}{2m_2\Omega_c},$$

где $\omega_a=\sqrt{k_2/m_2}$ – собственная частота системы, выполняющей роль гасителя колебаний (или рабочего органа для системы вибрационной машины), Ω_c – собственная частота основной массы, выполняющей роль защищаемого объекта (или вибровозбудителя), f – коэффициент соотношения собственных частот, μ – коэффициент отношения масс, γ – безразмерный коэффициент трения, ω – частота внешнего силового возмущения, g – частота внешнего возмущения в безразмерной форме.

Приведенные к безразмерному виду передаточные функции $\mathbf{X}^*$ удовлетворяют матричному уравнению с матрицей системы (матрицей жесткости) $\mathbf{M}$ и вектором правой части $\mathbf{F}^*$ (обобщенных сил):

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{X}^* = \mathbf{F}^*,$$

с компонентами:

$$\mathbf{M}_{Re} = \begin{bmatrix} \mu f^2 - g^2 + 1 & -\mu f^2 \\ -\mu f^2 & \mu f^2 - \mu g^2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{Im} = \begin{bmatrix} 2\gamma\mu g & -2\gamma\mu g \\ -2\gamma\mu g & 2\gamma\mu g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нормализованные передаточные функции имеют вид:

$$|X_1^*| = \frac{\left| \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -\mu f^2 \\ 0 & \mu f^2 - \mu g^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2j\gamma\mu g \\ 0 & 2j\gamma\mu g \end{bmatrix} \right) \right|}{|\det \mathbf{M}|},$$

$$|X_2^*| = \frac{\left| \det \left(\begin{bmatrix} \mu f^2 - g^2 + 1 & 1 \\ -\mu f^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2j\gamma\mu g & 1 \\ -2j\gamma\mu g & 0 \end{bmatrix} \right) \right|}{|\det \mathbf{M}|},$$

$$\frac{|X_1^*|}{|X_2^*|} = \frac{\left| \det \left(\begin{bmatrix} 1 & -\mu f^2 \\ 0 & \mu f^2 - \mu g^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2j\gamma\mu g \\ 0 & 2j\gamma\mu g \end{bmatrix} \right) \right|}{\left| \det \left(\begin{bmatrix} \mu f^2 - g^2 + 1 & 1 \\ -\mu f^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2j\gamma\mu g & 1 \\ -2j\gamma\mu g & 0 \end{bmatrix} \right) \right|},$$

где определитель:

$$\det \mathbf{M} = \Delta_{Re} + j\Delta_{Im},$$

$$\Delta_{Re} = -\mu^2 f^2 g^2 - \mu f^2 g^2 + \mu g^4 + \mu f^2 - \mu g^2,$$

$$\Delta_{Im} = -2\gamma\mu^2 g^3 - 2\gamma\mu g^3 + 2\gamma\mu g.$$

Обозначения: $A_1^2(g) = |X_1^*|^2$, $A_2^2(g) = |X_2^*|^2$, $A_{12}^2(g) = |X_1^*|^2 / |X_2^*|^2$.

II. Результаты и обсуждение

Для каждой передаточной функции могут быть получены узловые точки, в которых пересекаются графики семейства амплитудно-частотных характеристик, рассматриваемых в зависимости от коэффициента вязкого трения как от параметра. В классических работах для определения оптимальной формы амплитудно-частотной характеристики выбирается коэффициент трения их условий на производные в узлах. В данной работе развивается подход параметрической трехточечной настройки, для которой оптимальная амплитудно-частотная характеристика проходит через три точки – через два узла g_1 и g_2 , расположенных на одной высоте, а третья точка с горизонтальной координатой g_0 находится на высоте, превышающей в $1+\varepsilon$ раза высоту узловых точек. Коэффициент ε отображает особенности динамического состояния в промежуточной точке g_0 , если $\varepsilon > 0$ – реализуется усиление интенсивности колебаний, если $\varepsilon < 0$ – то ослабление. Аналитическая форма записи:

$$A_1(g_1)(1+\varepsilon) = A_1(g_0) = A_1(g_2)(1+\varepsilon).$$

Оптимальное демпфирование для первой координаты найдено в виде:

$$\gamma_{1,pts}^2(\varepsilon) = \frac{\mu}{2(\mu+1)^3} + \varepsilon \frac{\mu(\mu+2)}{2(\mu+1)^3} + \varepsilon^2 \frac{\mu(\mu+2)}{4(\mu+1)^3}.$$

Для второй координаты и средней точки g_0 коэффициента трения находится их условий:

$$A_2(g_1)(1+\varepsilon) = A_2(g_0) = A_2(g_2)(1+\varepsilon).$$

Решение имеет вид:

$$\gamma_{2,pts}^2(\varepsilon) = \frac{2\mu - \mu^2}{4(\mu+1)^3} + \frac{\varepsilon}{2(\mu+1)^3} + \frac{\varepsilon^2}{4(\mu+1)^3}.$$

Исследования показали, что можно обеспечить условия «плато», либо для одной координаты (А₁-плато), либо для другой (А₂-плато), но не одновременно для обеих. Для каждого коэффициента интенсивности можно найти коэффициент трения и оценить значение межпарциальной связи в средней частоте g_0 , зависящее от ε . Значения данных межпарциальных характеристик имеют вид:

$$A_{12,1}^2(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^2(\mu+2)\mu}{1+(\varepsilon^2+2\varepsilon)\mu^2+2(1+\varepsilon)^2\mu}, A_{12,2}^2(\varepsilon) = \frac{3\mu^2+\varepsilon^2+2\mu+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}.$$

Подобные характеристики, с одной стороны, могут быть использованы для настройки динамических режимов колебаний вибрационных машин, с другой стороны, могут быть использованы для определения параметров вибрационной машины, если известны экспериментальные данные. В частности, на рисунке 1, с представлена связь между экспериментальными данными, полученными на основе измерений вибрационных процессов (рис. 1, с). На рисунке показаны блоки измерений 1 и 2, отражающие отношение амплитуд колебаний рабочего органа и вибровозбудителя при различных массовых отношениях.

Закключение

Выведены полные аналитические выражения нормализованных амплитудно-частотных характеристик, координат инвариантных точек двухмассовой системы, установлена структурная независимость межпарциальной передаточной функции от массового отношения, а введённый коэффициент интенсивности позволил получить аналитические условия адаптивной настройки демпфирования для целенаправленного формирования динамического качества резонансных режимов.

Возможным дальнейшим направлением развития данного подхода является разработка аналитических соотношений, реализующих переход от моногармонических возмущений детерминированной природы к стохастической. В свою очередь, рассмотренные взаимодействия пары поступательных движений расширяются на взаимодействия, в которых парциальные системы могут совершать так же и вращательные движения. Подобные расчетные схемы существенно расширяют области приложения структурного подхода. Методология структурного математического моделирования с критерием «плато» и инвариантными точками переносима на любую систему, где есть источник колебаний, рабочий орган и диссипативная среда между ними или внешняя вязкая нагрузка. Ценность использования критерия «плато» для колебательных систем в режиме резонанса — в переходе от «точечной» настройки под конкретный режим к робастному синтезу, устойчивому к изменению параметров среды. Это особенно актуально для Industry 4.0, где требуется адаптация оборудования к меняющимся условиям без ручной переналадки.

Список литературы

1. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. – М.: Физматгиз, 1960. – 580 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
3. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – DOI: 10.4018/978-1-6684-7237-8.

References

1. Den Hartog J.P. Mechanical Vibrations. – M.: Fizmatgiz, 1960. – 580 p.
2. Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering. – M.: Science, 1967. – 444 p.
3. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – DOI: 10.4018/978-1-6684-7237-8.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department of mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования	Mironov Artem Sergeevich – applicant, REC of modern technologies, system analysis and modeling
eavsh@ya.ru	

Received 29.04.2026