

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОТОЧНОГО КАНАЛА

**Тамарова Ю.А.**

*Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия*

**Ключевые слова:** аэроупругость, упругий элемент, динамика, нелинейность, метод конечных разностей, неявная схема.

**Аннотация.** Исследуется динамика упругого элемента стенки канала при протекании в канале дозвукового сжимаемого потока газа или жидкости. Для описания динамики упругого элемента используется нелинейная модель. Предложен численный метод исследования динамики на основе метода конечных разностей. Используется неявно-явная разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространству, в которой члены с высшими пространственными производными аппроксимируются неявно, а остальные – явно.

## NUMERICAL METHOD FOR STUDYING NONLINEAR DYNAMICS OF AN ELASTIC ELEMENT OF A FLOW CHANNEL

**Tamarova Yu.A.**

*Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia*

**Keywords:** aeroelasticity, elastic element, dynamics, nonlinearity, finite difference method, implicit scheme.

**Abstract.** The dynamics of an elastic element of a channel wall during a subsonic compressible gas or liquid flow is investigated. A nonlinear model is used to describe the elastic element dynamics. A numerical method for studying the dynamics based on the finite difference method is proposed. A second-order implicit-explicit difference scheme with approximations in time and space is used, in which terms with higher spatial derivatives are approximated implicitly, while the remaining terms are approximated explicitly.

Рассматривается плоское течение в прямоугольной области  $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$  при  $t \geq 0$ , где  $J$  – расчетная область (прямолинейный канал);  $R$  – множество действительных чисел;  $x_0, y_0$  – геометрические размеры канала;  $t$  – время. Скорость невозмущенного однородного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Упругим элементом является часть стенки  $y = y_0$  при  $x \in [b, c]$  (рис. 1).

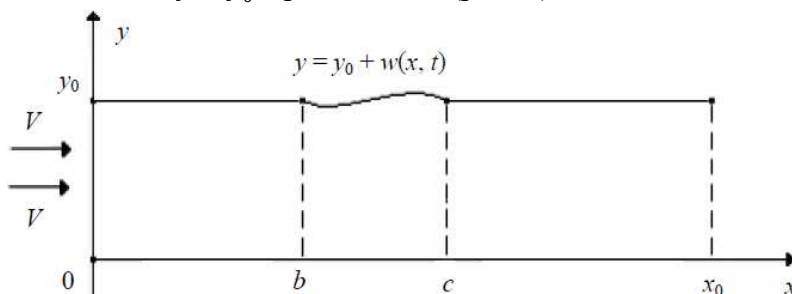


Рис. 1. Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Введем обозначения:  $u(x,t)$  и  $w(x,t)$  – деформации элемента в направлении осей  $Ox$  (продольная составляющая) и  $Oy$  (поперечная составляющая) соответственно;  $\varphi(x,y,t)$  – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая модель содержит следующие уравнения и условия:

– волновое уравнение для сжимаемого потока

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x,y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $a$  – скорость звука в невозмущенном потоке газа или жидкости ( $a > V$ );

– условия непротекания стенок канала

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

– условия отсутствия возмущений в граничных сечениях канала

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

– уравнение, описывающее динамику упругого элемента

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right) \right]' + M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + Nw''(x, t) + \\ + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}'''(x, t) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \\ x \in (b, c), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $F$  – площадь поперечного сечения упругого элемента;  $M$ ,  $D$  – погонная масса и изгибная жесткость упругого элемента ( $M = \rho_s h$ ,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , где  $h$  – толщина упругого элемента,  $\rho_s$  – плотность

материала,  $\nu$  – коэффициент Пуассона);  $N$  – сжимающая ( $N > 0$ ) или растягивающая ( $N < 0$ ) упругий элемент сила;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости основания;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования;

$\rho$  – плотность жидкости или газа в однородном невозмущенном потоке;

– граничные условия закрепления пластины

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0 \quad \text{при } x = b \text{ и } x = c, \quad (7)$$

– начальные условия

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 0) = g_1(x), \quad \dot{u}(x, 0) = g_2(x), \quad x \in (b, c),$$

$$\varphi(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \psi_2(x, y), \quad (x, y) \in J, \quad (8)$$

где  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  – некоторые заданные функции.

В (1)-(8) индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих и точка – частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно.

Для численного решения связанной начально-краевой задачи (1)-(8) выбран метод конечных разностей второго порядка точности [1]. Выбор обусловлен простой геометрией расчётной области (прямоугольный канал), что позволяет использовать регулярные разностные сетки без потери точности аппроксимации границ. Введем равномерную разностную сетку в области  $\Omega = [0, x_0] \times [0, y_0] \times [0, T]$  ( $T$  – конечный момент времени):  $x_i = ih_x$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $h_x = \frac{x_0}{N_x}$ ;  $y_j = jh_y$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_y$ ,  $h_y = \frac{y_0}{N_y}$ ;  $t_k = kh_t$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $N_x, N_y$  – число интервалов разбиения по координатам  $x$  и  $y$  соответственно;  $h_x, h_y$  – шаги пространственной сетки;  $h_t$  – шаг по времени. Введем обозначения:  $\varphi(x_i, y_j, t_k) = \varphi_{ij}^k$ ,  $w(x_i, t_k) = w_i^k$ ,  $u(x_i, t_k) = u_i^k$ . Упругий элемент расположен на интервале  $x \in [b, c]$ , которому соответствуют узлы сетки с индексами  $i_b = \frac{b}{h_x}$ , ...,  $i_c = \frac{c}{h_x}$ . Граница контакта жидкости и упругого элемента  $y = y_0$  соответствует индексу  $j = N_y$ .

Уравнение (1) для потенциала  $\varphi(x, y, t)$  аппроксимируется явной разностной схемой второго порядка точности. Для внутренних узлов сетки имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{k+1} = & 2\varphi_{ij}^k - \varphi_{ij}^{k-1} - \frac{Vh_t}{h_x} \left[ (\varphi_{i+1j}^k - \varphi_{i-1j}^k) - (\varphi_{i+1j}^{k-1} - \varphi_{i-1j}^{k-1}) \right] - \\ & - \frac{h_t^2(V^2 - a^2)}{h_x^2} (\varphi_{i+1j}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{i-1j}^k) + \frac{h_t^2 a^2}{h_y^2} (\varphi_{ij+1}^k - 2\varphi_{ij}^k + \varphi_{ij-1}^k). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение для продольных перемещений – первое уравнение (6) – аппроксимируется явной схемой. Для узлов упругого элемента ( $i \in (i_b + 1, i_c - 1)$ ) получим:

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \frac{EFh_t^2}{Mh_x^2} \left[ \left( \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h_x} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{h_x} \right)^2 \right) - \left( \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_x} \right)^2 \right) \right]. \quad (10)$$

Уравнение для поперечных перемещений – второе уравнение (6) – аппроксимируется неявной схемой: члены  $Dw'''(x, t)$  и  $\beta_2 \dot{w}'''(x, t)$  аппроксимируются с помощью неявной разностной схемы, все остальные члены – с помощью явной разностной схемы. Для узлов упругого элемента  $i \in (i_b + 2, i_c - 2)$  значения  $w_i^{k+1}$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma w_{i-2}^{k+1} - 4\gamma w_{i-1}^{k+1} + (1 + 6\gamma) w_i^{k+1} - 4\gamma w_{i+1}^{k+1} + \gamma w_{i+2}^{k+1} = R_i, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}
R_i = & 2w_i^k - w_i^{k-1} - \left( \frac{h_t^2 D}{2Mh_x^4} + \frac{h_t \beta_2}{2Mh_x^4} \right) \Lambda_i^k + \left( -\frac{h_t^2 D}{2Mh_x^4} + \frac{h_t \beta_2}{2Mh_x^4} \right) \Lambda_i^{k-1} - \frac{Nh_t^2}{Mh_x^2} (w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k) - \\
& - \frac{\beta_0 h_t^2}{Mh_x^2} w_i^k - \frac{\beta_1 h_t}{M} (w_i^k - w_i^{k-1}) + \frac{EFh_t^2}{Mh_x^2} \left[ \left( \frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{h_x} \right) \left( \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h_x} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_{i+1}^k - w_i^k}{h_x} \right)^2 \right) - \right. \\
& \left. - \left( \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_x} \right) \left( \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h_x} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_x} \right)^2 \right) \right] - \frac{\rho h_t^2}{M} \left( \frac{\phi_{iN_y}^k - \phi_{iN_y}^{k-1}}{h_t} + V \frac{\phi_{i+1N_y}^k - \phi_{i-1N_y}^k}{2h_x} \right), \\
\gamma = & \frac{h_t^2 D}{2Mh_x^4} + \frac{h_t \beta_2}{2Mh_x^4}, \quad \Lambda_i^k = w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k.
\end{aligned}$$

Из условий (2)-(5) имеем

$$\begin{aligned}
\phi_{i,N_y+1}^k &= \phi_{i,N_y-1}^k + 2h_y \left( \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} + V \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_x} \right), \quad i = i_b, \dots, i_c; \\
\phi_{i,N_y+1}^k &= \phi_{i,N_y-1}^k, \quad i = 0, \dots, i_b - 1 \text{ и } i = i_c + 1, \dots, N_x; \\
\phi_{i,-1}^k &= \phi_{i,1}^k, \quad i = 0, 1, \dots, N_x; \quad \phi_{0,j}^k = 0, \quad \phi_{N_x,j}^k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.
\end{aligned}$$

Из граничных условий (7) получим

$$\begin{aligned}
w_b^k &= 0, \quad w_c^k = 0, \quad u_{i_b}^k = 0, \quad u_{i_c}^k = 0; \\
w_{i_b-1}^k &= -w_{i_b+1}^k, \quad w_{i_c+1}^k = -w_{i_c-1}^k; \quad w_{i_b-2}^k = -w_{i_b+2}^k, \quad w_{i_c+2}^k = -w_{i_c-2}^k.
\end{aligned}$$

Начальные условия (8) примут вид

$$\begin{aligned}
w_i^0 &= f_1(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), & w_i^0 &= 0 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \\
\frac{w_i^1 - w_i^0}{h_t} &= f_2(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), & w_i^0 &= w_i^1 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \\
u_i^0 &= g_1(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), & u_i^0 &= 0 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \\
\frac{u_i^1 - u_i^0}{h_t} &= g_2(x_i) \text{ при } i \in (i_b, i_c), & u_i^0 &= u_i^1 \text{ при } i \in (0, i_b) \cup (i_c, n); \\
\phi_{ij}^0 &= \psi_1(x_i, y_j); \quad \frac{\phi_{ij}^1 - \phi_{ij}^0}{h_t} = \psi_2(x_i, y_j) \Rightarrow \phi_{ij}^1 = \psi_1(x_i, y_j) + h_t \psi_2(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

На каждом временном шаге необходимо решать систему линейных уравнений (11) методом прогонки. Получены условия устойчивости разностных схем (9)-(11), которые были учтены в расчетах при выборе шага по времени. Численные расчеты выполнены с использованием программы, разработанной на языке Python. Получены графики зависимостей функции прогиба  $w(x, t)$  и функции продольного перемещения  $u(x, t)$  от времени при варьировании параметров задачи: скорости потока  $V$ , продольной силы  $N$ , коэффициентов демпфирования  $\beta_1, \beta_2$ , толщины пластины  $h$ .

На рисунках 2-3 представлены примеры расчетов для механической системы с параметрами: поток – воздух ( $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$ ),  $V = 2 \text{ м/с}$ ,  $a = 343 \text{ м/с}$ ; упругий элемент (пластина) изготовлен из алюминия:  $\rho_s = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 70 \text{ ГПа}$ ,  $EF = 350 \text{ МН}$ ,  $\nu = 0.33$ ,  $h = 5 \text{ мм}$ ,  $M = 13.5 \text{ кг/м}^2$ ,  $D = 808.85 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;  $\beta_0 = 5 \text{ Н/м}^3$ ,  $\beta_1 = 0.5 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ ,  $\beta_2 = 0.6 \text{ кг/с}$ ;  $x_0 = 5 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0.2 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ,  $c = 3 \text{ м}$ . При реализации расчетов было введено разбиение:  $Nx = 30$ ,  $Ny = 20$ ; конечный момент времени  $T = 1 \text{ с}$ .

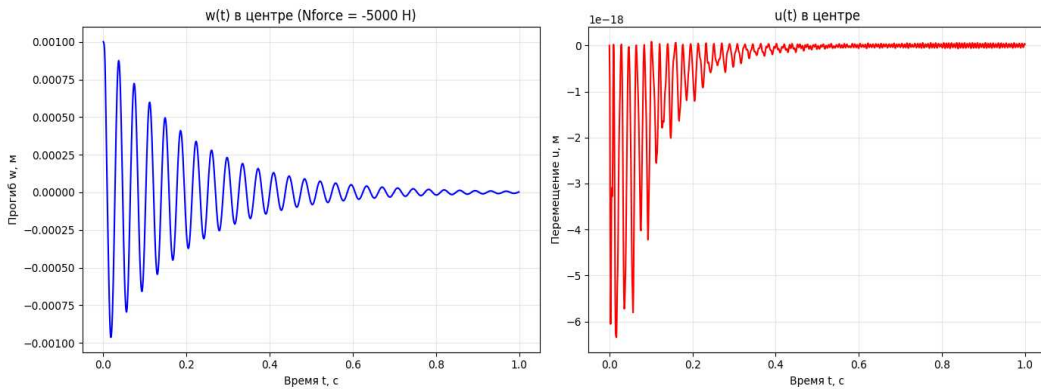


Рис. 2. Зависимости  $u(t)$  и  $w(t)$  в центре пластины при  $N = -5000 \text{ Н}$

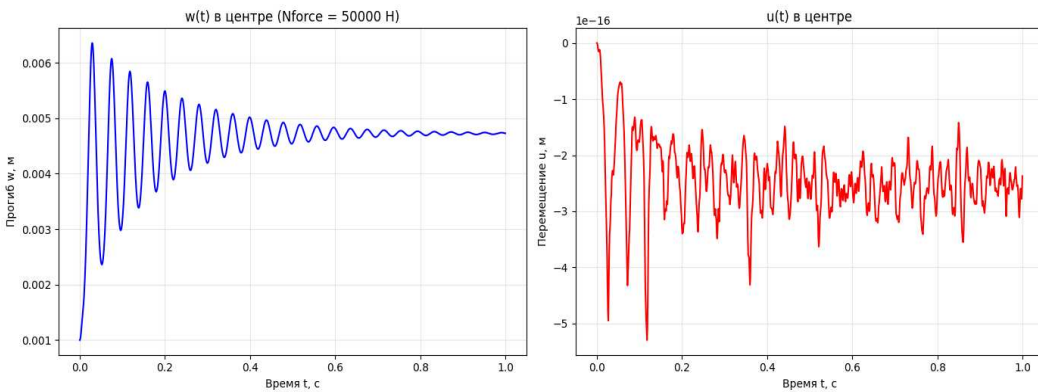


Рис. 3. Зависимости  $u(t)$  и  $w(t)$  в центре пластины при  $N = 50000 \text{ Н}$

Из рисунка 3 видно, что при достаточно большом сжатии происходит отклонение пластины от прямолинейного положения равновесия. Графики демонстрируют качественно разное поведение системы при сжатии и растяжении, что необходимо учитывать при проектировании аэроупругих конструкций.

В случае линейной модели деформируемого упругого элемента исследования проводились в работах [2, 3]. В статье [4] исследовалась динамическая устойчивость упругого элемента на основе построения функционала Ляпунова.

### Список литературы

1. Самарский А.А. Теория разностных схем, учебное пособие. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. – С. 657.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, №1. – С. 94-107.
3. Тамарова Ю.А. Численный метод исследования динамики упругого элемента проточного канала // Вузовская наука в современных условиях: сборник материалов 50-й научно-технической конференции. В 3 ч. Ч. 2. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. – С. 169-173.
4. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Динамическая устойчивость упругого элемента проточного канала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – №3(31). – С. 40-55.

### References

1. Samarskii A.A. Theory of difference schemes, a tutorial. – M.: Main editorial board of physical and mathematical literature of the publ. house "Science", 1977. – 657 p.
2. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Research on dynamics and stability of an elastic element of the flow channel // Middle Volga mathematical society journal. 2016, vol. 18, no. 1, pp. 94-107.
3. Tamarova Yu.A. Numerical method for studying the dynamics of an elastic element of a flow channel // University science in modern conditions: collection of materials of the 50th scientific and technical conference. In 3 parts. Part 2. – Ulyanovsk: UlSTU, 2016. – P. 169-173.
4. Ankilov A.V., Velmisov P.A., Tamarova Yu.A. Dynamic stability of an elastic element of a flow channel // News of higher educational institutions. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2014, no. 3(31), pp. 40-55.

|                                                                                                      |                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Тамарова Юлия Александровна</b> –<br>соискатель кафедры «Высшая математика»<br>kazakovaua@mail.ru | <b>Tamarova Yulia Aleksandrovna</b> – applicant<br>of the Department of higher mathematics |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|

*Received 28.04.2026*