

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2026-53-30-37>

ПРИМЕРЫ ЭКОНОМИИ ЭНЕРГИИ В УПРАВЛЯЕМОМ ДВИЖЕНИИ ОБЪЕКТОВ

Бохонский А.И.¹, Майстришин М.М.¹, Варминская Н.И.², Рыжков А.И.¹

¹*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, Севастополь, Россия*

Ключевые слова: управление движением, энергосбережение, задача Лагранжа, вариационный метод, конструируемое управление.

Аннотация. Сравнивается энергопотребление классического оптимального управления (вариационный метод теории оптимального управления) с реверсионно конструированным оптимальным управлением (переносным ускорением) для поступательного движения объектов. Приводятся простые примеры управления движением с ненулевой начальной скоростью или с переходом из состояния покоя к заданной скорости, а также дана оценка энергии, затрачиваемой на такие типы движений (в сравнении с классическим управлением). Результаты исследования показали, что с увеличением степени используемого полинома для перемещения энергия, затрачиваемая на управление движением, уменьшается.

EXAMPLES OF ENERGY SAVINGS IN CONTROLLED MOTION OF OBJECTS

Bokhonsky A.I.¹, Maystrishin M.M.¹, Varminskaya N.I.², Ryzhkov A.I.¹

¹*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;*

²*Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia*

Keywords: motion control, energy saving, Lagrange problem, variational method, constructible control.

Abstract. The energy consumption of classical optimal control (the variational method of optimal control theory) is compared with that of a reversibly constructed optimal control (translational acceleration) for the translational motion of objects. Simple examples of motion control with a non-zero initial velocity or with a transition from rest to a given velocity are given, and an estimate of the energy expended on these types of motions is provided (in comparison with classical control). The results of the study show that as the degree of the polynomial used for displacement increases, the energy expended on motion control decreases.

Оптимальному управлению движением механических систем посвящены классические работы [1-7]. Вариационным методом Ж.Л. Лагранжем решена задача оптимального управления движением объекта с предварительно задаваемым квадратичным критерием оптимальности.

Принцип наименьшего принуждения [8] сформулирован К.Ф. Гауссом в 1829 г. В работе [9] А.П. Маркеевым приведены варианты формулировок и примеры применения принципа наименьшего принуждения; в истинном движении принуждение минимально. В оптимальном движении с разгоном и торможением не исключается наименьшее энергетическое принуждение для достижения цели движения.

В [10-18] обращено внимание на использование алгоритма решения полных обратных задач вариационного исчисления (названо – реверсионным) при конструировании оптимальных управлений типа «разгон-торможение»; показано, что при определенных условиях реализуется принцип наименьшего энергетического принуждения для достижения цели движения (из исходного покоя в конечное состояние покоя при заданном расстоянии и времени движения).

Цель исследования – сравнение результатов конструируемых оптимальных управлений движением объекта с известным простым классическим управлением (задача Лагранжа), полученным с использованием вариационного исчисления для прямой задачи – минимизации задаваемого квадратичного критерия оптимальности.

Использование реверсионного метода конструирования управлений при перемещении из исходного в конечное состояние покоя привело к появлению новых типов управлений, которым соответствуют восстановленные функционалы-критерии [11].

При решении полной обратной задачи вариационного исчисления (от функции – к функционалу) в случае управлений (переносных ускорений) в виде полиномов появились универсальные аналитические зависимости [12], в которых использованы нечетные степени полинома; в случае степени полинома ускорения $n = 1$ следует известная задача Лагранжа.

Для произвольного значения степени конструируемого полинома [3] получены универсальные зависимости:

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{2(n+1)}{T^{n+2}}(T-2t)^n, \quad V(t) = \frac{L(n+2)}{T(n+1)} \cdot \frac{1-(T-2t)^{n+1}}{T^{n+1}}, \\ S(t) &= \frac{1}{2T(n-1)} \cdot \left(\frac{(T-2t)^{n+2}}{T^{n+2}} + 2nt + 4t - T \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где L – общее перемещение объекта за время T ; S – перемещение; V – скорость; U – ускорение (управление); t – время; n – нечетная степень полинома.

Дальше будут использованы полиномы со степенью $n = 1$ (классический случай) и $n = 3$ – новый тип конструируемого управления.

Пример 1. Управление разгоном. Случай $n = 1$.

Краевые условия (перемещение и скорость в начальный и конечный моменты времени):

$$S(0) = 0; \quad \dot{S}(0) = 0; \quad S(T) = L; \quad \dot{S}(T) = V_0. \quad (2)$$

Задан полином перемещения и его производные:

$$S(t) = \sum_{i=3}^4 C_i t^{i-1}, \quad V(t) = \frac{dS}{dt}, \quad U(t) = \frac{dV}{dt}. \quad (3)$$

Принято: $L = 1$ м, $T = 1$ с. Решая систему алгебраических уравнений (2), получим:

$$C_3 = 2; \quad C_4 = -1. \quad (4)$$

С учетом (2) следует

$$S(t) = 2t^2 - t^3; \quad V(t) = 4t - 3t^2; \quad U(t) = 4 - 6t. \quad (5)$$

Графики функций графики перемещения, скорости и ускорения ($S(t)$, $V(t)$, $U(t)$) изображены на рисунке 1. За время $T = 1$ с цель достигается – объект на участке $0 < S(t) < L$ разгоняется до скорости $V(T) = 1$ м/с.

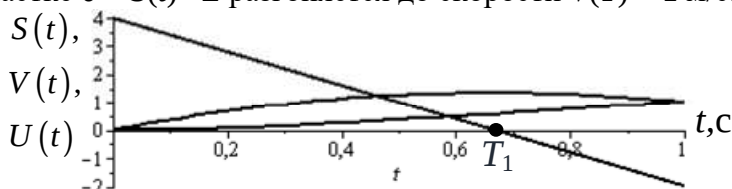


Рис. 1. Управление разгоном, $n = 1$, графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$

Для вычисления общей энергии управления (переносного ускорения) с использованием функции $f\text{solve}(U,t)$ найдено время переключения из разгона на торможение $T_1 = 0,6666$ с. В этом случае общая энергия, затрачиваемая на разгон-торможение объекта,

$$A_1 = \int_0^{T_1} U \cdot V dt - \int_{T_1}^T U \cdot V dt = 1,2779 \text{ Дж.}$$

Пример 2. Неклассический случай ($n = 3$)

Полином перемещения

$$S(t) = \sum_{i=3}^6 C_i t^{i-1}, \quad V(t) = \frac{dS}{dt}, \quad U(t) = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (6)$$

К краевым условиям добавляются дополнительные – условия экономии энергии (отсечение избыточной – равенства нулю ускорения и его производной в момент времен $t = T/2$):

$$U(T/2) = 0; \quad \frac{dU}{dt}(T/2) = 0. \quad (7)$$

Отметим, что критерием оптимальности является функционал $\int_0^T [\dot{U}]^2 dt$

и для него уравнение Эйлера $\frac{d^6 S}{dt^6} = 0$.

При прежних численных исходных данных ($L = 1$ м, $T = 1$ с, $V = 1$ м/с) из решения системы уравнений (2, 7) получены коэффициенты полинома:

$$C_3 = 4; \quad C_4 = -7; \quad C_5 = 6; \quad C_6 = -2. \quad (8)$$

Движение описывается зависимостями:

$$\begin{aligned} S(t) &= 4t^2 - 7t^3 + 6t^4 - 2t^5, \\ V(t) &= 8t - 21t^2 + 24t^3 - 10t^4, \\ U(t) &= 8 - 42t + 72t^2 - 40t^3. \end{aligned} \quad (9)$$

Графики функций (9) изображены на рисунке 2. Цель движения достигается.

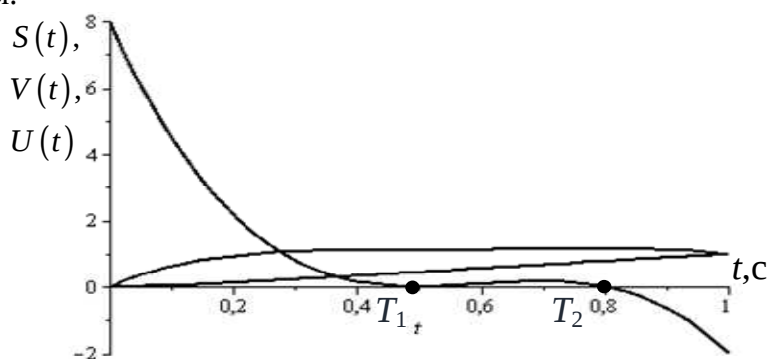


Рис. 2. Управление разгоном, $n = 3$, графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$

При найденных фиксированных моментов времени переключения ускорения (согласно функции $fsolve(U, t)$ $T_1 = 0,5$ с, $T_2 = 0,8$ с) следует общая энергия для достижения цели движения

$$A_3 = \int_0^{T_1} U \cdot V dt + \int_{T_1}^{T_2} U \cdot V dt - \int_{T_2}^T U \cdot V dt = 0,8271 \text{ Дж}.$$

Пример 3. Влияние алгоритма конструирования на энергоемкость движения ($n = 3$).

Разгон. Все исходные данные приняты из Примера 2, но для коэффициентов C_5 , C_6 используется в данном случае функционал – критерий

$$J = \int \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 dt, \text{ из которого следуют дополнительные алгебраические}$$

уравнения: $P_5 = \frac{\partial J}{\partial C_5} = 0$; $P_6 = \frac{\partial J}{\partial C_6} = 0$. Получены значения коэффициентов:

$$C_3 = \frac{7}{4}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = \frac{5}{4}; \quad C_6 = \frac{1}{2}. \text{ Перемещение, скорость и ускорение}$$

принимают вид:

$$S(t) = \frac{7}{4}t^2 - \frac{5}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^5, \quad V(t) = \frac{7}{2}t - 5t^3 + \frac{5}{2}t^4, \quad U(t) = \frac{7}{2} - 15t^2 + 10t^3. \quad (10)$$

Графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$ изображены на рисунке 3.

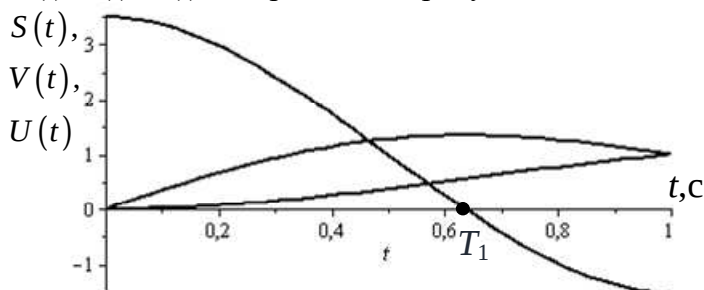


Рис. 3. Управление разгоном, $n = 3$, графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$

При затрате энергии A_3^* цель движения достигается.

$$A_3^* = \int_0^{T_1} U \cdot V dt - \int_{T_1}^T U \cdot V dt = 1,319 \text{ Дж}, \quad (11)$$

где $T_1 = 0,6367$ с.

Пример 4. ($n = 1$). *Торможение.* При $V_0 = 1$ м/с, $L = 1$ м, $T = 1$ с, $T_1 = 0,3333$ с. Графики изображены на рисунке 4.

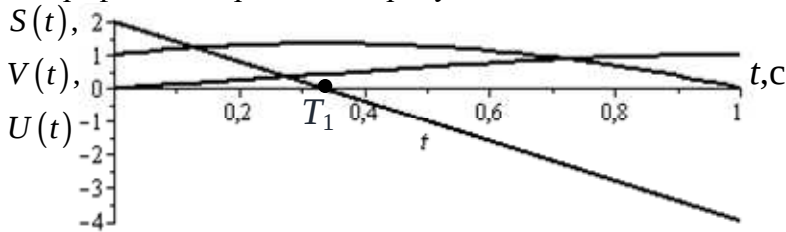


Рис. 4. Управление торможением, $n = 1$, классический пример, графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$

Затраченная общая энергия:

$$A_4 = \int_0^{T_1} U \cdot V dt - \int_{T_1}^{1,0} U \cdot V dt = 1,277 \text{ Дж}.$$

Пример 5. ($n = 3$). *Торможение.*

Краевые условия и условия экономии энергии

$$S(0) = 0, \dot{S}(0) = V_0, S(T) = L, \dot{S}(T) = 0; U\left(\frac{T}{2}\right) = 0; \frac{dU}{dt}\left(\frac{T}{2}\right) = 0. \quad (12)$$

Для исходных данных $V_0 = 1$ м/с, $L = 1$ м, $T = 1$ с получено:

$$S(t) = t + t^2 + 3t^4 + 4t^4 - 2t^3, V(t) = \frac{dS}{dt}, U(t) = \frac{dV}{dt}, \quad (13)$$

Графики, отражающие движение, изображены на рисунке 5.

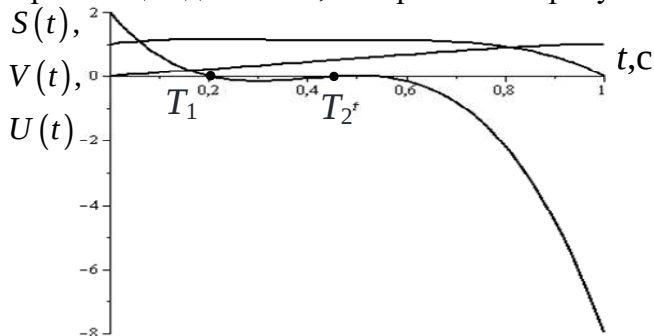


Рис. 5. Управление торможением, $n = 3$, графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$

С учетом переключений управления (с переносного ускорения) общая

$$\text{энергия движения } A_3^* = \int_0^{0,2} U \cdot V dt - \int_{0,2}^{0,5} U \cdot V dt - \int_{0,5}^1 U \cdot V dt = 0,8271 \text{ Дж}.$$

Полная обратная задача вариационного исчисления предполагает реализацию этапов – решение обратной задачи классической механики (нахождение причин (сил), вызывающих движение) и восстановление соответствующих функционалов-критериев. Реверсионный принцип оптимальности в аналитической механике управляемого движения означает, что согласно алгоритму решения полной обратной задачи (от исходной непрерывной дифференцируемой функции через ее уравнение Эйлера восстановление критерия-функционала) реализуется экстремальное свойство движения. Снижение энергии основано на исключении в переносном ускорении избыточной как на участке разгона, так и при торможении.

Существенное упрощение практической реализации таких управлений возможно при их замене эквивалентными по энергоемкости.

Заключение

1. В ряде исследований оптимальных переносных ускорений объектов найдены такие возможные ускорения, для которых при движении из исходного в конечное состояние покоя с заданным временем движения и расстоянием достигается экономия энергии (по сравнению с результатом решения известной задачи Лагранжа).

2. На ряде простых примеров показано, что при движении с известной начальной скоростью либо из состояния покоя с достижением заданной скорости за заданное время и расстояние не исключает достижение цели движения с экономией энергии (в сравнении с классическим управлением).

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 236 с.
5. Черноусько Ф.Л., Акуленко П.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. Теория автоматического регулирования. Ч.II. Теория нелинейных систем автоматического регулирования / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Госиздат, 1955. – 248 с.
7. Гаусс К. Об одном новом общем принципе механики // Вариационные принципы механики. – 1959. – С. 170-172.
8. Маркеев А.П. О принципе наименьшего принуждения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
9. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Конструирование оптимального управления движения объектов как абсолютно твердых и деформируемых тел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2016. – №3(317). – С. 70-76.

10. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
11. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.
12. Бохонский А.И., Рыжков А.И. Конструирование управляемого движения объекта // Механика, автоматика и робототехника. – 2017. – №1. – С. 64-69.
13. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Принцип и теоремы реверсионного исчисления // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2021. – №3 (347). – С. 12-20.
14. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Минимальное энергетическое принуждение для достижения цели управляемого движения объекта // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2022. – №28. – С. 30-36.
15. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Снижение энергетического принуждения при эквивалентном оптимальном управлении движением объекта // Journal of Advanced Research in Natural Science. – 2022. – №16. – С. 24-30.
16. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Оценка энергоемкости минимального принуждения целенаправленного движения объекта // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2022. – №1(351). – С. 15-20.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyansky B.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. – М.: Science, 1969. – 384 p.
2. Krasovsky N.N. Theory of motion control. – М.: Science, 1968. – 476 p.
3. Krutko P.D. Inverse problems of dynamics of controlled systems: linear models. – М.: Science, 1987. – 304 p.
4. Troitsky V.A. Optimal oscillation processes of mechanical systems. – L.: Mechanical Engineering, 1976. – 236 p.
5. Chernousko F.L., Akulenko P.D., Sokolov B.N. Control of oscillations. – М.: Science, 1980. – 384 p.
6. Theory of Automatic Control. Part II. Theory of Nonlinear Automatic Control Systems / Ed. by A.A. Voronov. – М.: Gosizdat, 1955. – 248 p.
7. Gauss K. On a new general principle of mechanics // Variational principles of mechanics. 1959, pp. 170-172.
8. Markeev A.P. On the principle of least constraint [Electronic resource]. – Access mode: http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
9. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Design of optimal control of motion of objects as absolutely rigid and deformable bodies // Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology. 2016, no. 3(317), pp. 70-76.
10. Bokhonsky A.I. Reversional principle of optimality. – М.: University textbook: INFRA-M, 2016. – 174 p.
11. Bokhonsky A.I. Energy consumption of object motion control // Fundamental Foundations of Mechanics. 2017, no. 2, pp. 38-41.
12. Bokhonsky A.I., Ryzhkov A.I. Design of controlled motion of an object // Mechanics, Automation and Robotics. 2017, no. 1, pp. 64-69.
13. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Principle and theorems of reversional calculus // Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology. 2021, no. 3(347), pp. 12-20.

14. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Minimum energetic constraint for achieving the goal of controlled motion of an object // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022, iss. 28, pp. 30-36.
15. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Reduction of energetic constraint under equivalent optimal control of object motion // Journal of Advanced Research in Natural Sciences. 2022, no. iss, pp. 24-30.
16. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Estimation of energy consumption of minimal constraint for purposeful motion of an object // Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology. 2022, no. 1(351), pp. 15-20.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonsky Aleksandr Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the Department «Digital design»
Майстришин Михаил Михайлович – кандидат технических наук, доцент, директор Морского колледжа	Mikhail Mikhailovich Maistrishin – candidate of technical sciences, associate professor, director of the Maritime college
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Рыжков Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Цифровое проектирование»	Ryzhkov Aleksandr Igorevich – candidate of technical sciences, associate professor of the Department «Digital design»
bohon.alex@mail.ru	

Received 17.04.2026