

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-51-40-48>

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ БИОМЕХАТРОННОГО МАНИПУЛЯТОРНОГО ПРОТЕЗА ВЕРХНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ

*Нимирич Н.С.*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Ключевые слова:** протез верхней конечности, биомехатронный протез манипуляторной структуры, описание кинематики протеза параметрами Денавита–Хартенберга, описание динамики протеза методом Эйлера–Лагранжа, компьютерная модель движения протеза.

**Аннотация.** Разработана и исследована математическая модель движения биомехатронного манипуляторного протеза верхних конечностей. В основу конструкции протеза положен семи-степенной манипулятор, имитирующий структуру верхней конечности. Рассмотрена кинематическая схема протеза с использованием представления Денавита–Хартенберга. Рассмотрена динамическая модель протеза с использованием метода Лагранжа–Эйлера. Проведена компьютерная апробация модели движения протеза в среде Python с моделированием изменения углов поворота его суставов.

## MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF BIOMECHATRONIC MANIPULATOR PROSTHESIS OF THE UPPER EXTREMITIES

*Nimirich N.S.*

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

**Keywords:** upper limb prosthesis, biomechatronic prosthesis with manipulator structure, description of the kinematics of the prosthesis by Denavit-Hartenberg parameters, description of the dynamics of the prosthesis by the Euler-Lagrange method, computer model of prosthetic movement.

**Abstract.** A mathematical model of the movement of a biomechanical manipulator prosthesis of the upper extremities has been developed and investigated. The design of the prosthesis is based on a seven-degree manipulator that mimics the structure of the upper limb. The kinematic scheme of the prosthesis using the Denavit-Hartenberg representation is considered. A dynamic model of the prosthesis using the Lagrange-Euler method is considered. A computer model of the movement of the prosthesis was tested in the Python environment with modeling of changes in the angles of rotation of its joints.

Все большую актуальность приобретает проблема разработки моделей бионических протезов верхних конечностей, так как всё больше людей страдают от различных заболеваний и травм, приводящих к их потере. Бионические протезы позволяют наиболее полноценно восстанавливать функции повреждённых конечностей. При этом активное развитие высокотехнологичного протезостроения приводит к появлению все более совершенных конструкций протезов и протезируемых систем [1]. В настоящей работе рассматриваются вопросы разработки и исследования математической модели движения современного вида бионического протеза верхних конечностей (ВК) – биомехатронного манипуляторного протеза (БМП).

### Конструктивные особенности БМП ВК

БМП ВК – это протезируемая система, имитирующая анатомические и функциональные свойства здоровой руки человека, в которой реализованы электронные и механические компоненты для восстановления утраченных моторных функций. Работа данного протеза основана на преобразовании биологических сигналов, получаемых от сохранившихся мышц или нервов, при помощи электроэнцефалографии (ЭЭГ) и электромиографии (ЭМГ), в управляющие команды, которые обрабатываются микропроцессором и реализуются исполнительными механизмами, обеспечивая необходимые захват, удержание и манипуляции ВК [2].

Конструктивной особенностью рассматриваемого БМП ВК является манипуляторная семи-степенная структура его кинематической схемы, представленной на рисунке 1. Данная особенность протеза обусловлена многозвенной структурой, пространственной степенью подвижности и необходимостью точного позиционирования его рабочих органов (кисти) для выполнения разнообразных моторных функций.

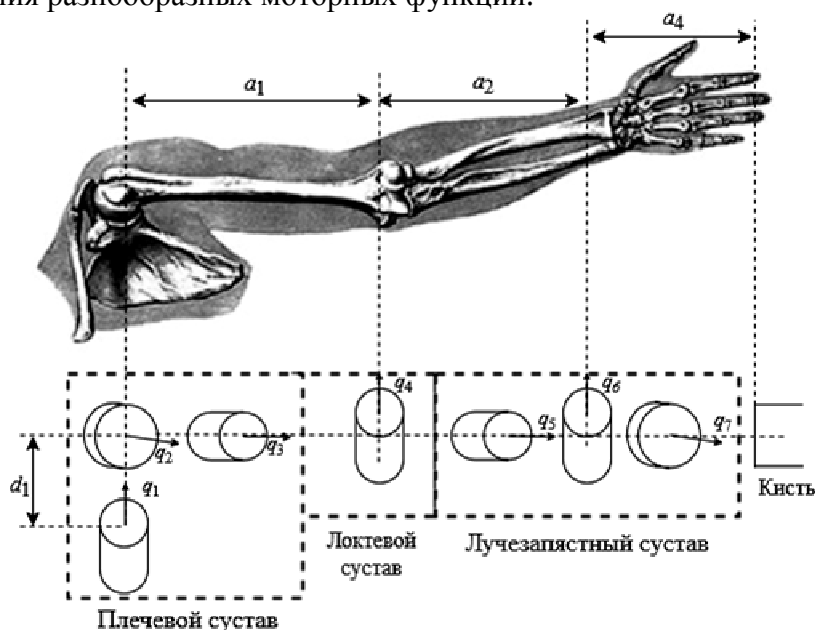


Рис. 1. Кинематическая схема БМП ВК

Следует заметить, что подобные манипуляторные протезы, имитирующие структуру человеческой руки, используются во многих работах (см., например, [3]).

### Кинематическая модель БМП ВК

Для математического описания кинематики манипуляторных систем с древовидной кинематической структурой наибольшее распространение получил метод представления Денавита-Хартенберга (Д-Х), позволяющий определить положение рабочего органа манипулятора через положение его основания. Метод Д-Х основан на использовании матриц однородных

преобразований с минимальным числом параметров, определяющих взаимное расположение звеньев манипулятора, причем вид матрицы одинаков как для вращательного, так и для поступательного сочленений.

Для семи-степенного манипулятора БМП ВК выделены следующие звенья, соответствующие анатомической структуре человеческой руки:

Три звена плечевого комплекса:

- звено 1 – сгибание/разгибание плеча (сагиттальная плоскость);
- звено 2 – отведение/приведение плеча (фронтальная плоскость);
- звено 3 – внутренняя/внешняя ротация плеча (поперечная плоскость).

Одно звено локтевого сустава:

- звено 4 – одноосный шарнирный сустав

Три звена лучезапястного комплекса:

- звено 5 – пронация/супинация предплечья;
- звено 6: сгибание/разгибание запястья;
- звено 7: радиальное отклонение кисти.

В соответствии с конвенцией Д-Х [4], для каждого звена манипулятора были определены системы координат, причем принятые здесь параметры конфигурации манипулятора назначены сходно с моделями, предложенными, например, в работах [5, 6].

В предложенной таблице Д-Х-параметров все значения  $a_i = 0$ , поскольку оси вращения суставов человеческой руки практически пересекаются или очень близко расположены, что минимизирует смещения между осями и человеческие суставы представляют собой шаровые и шарнирные соединения с минимальными линейными смещениями между осями вращения. Выбор углов скручивания  $\alpha_i = \{-\pi/2, -\pi/2, -\pi/2, +\pi/2, +\pi/2, +\pi/2, +\pi/2\}$  определяется необходимостью согласования ориентации осей между последовательными суставами. Параметры  $d_i = \{d_1, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_4\}$  соответствуют физическим длинам сегментов руки:  $a_1$  – длина плеча (от центра плечевого сустава до локтя),  $a_2$  – длина предплечья (от локтя до запястья),  $a_4$  – длина кисти (от запястья до центра схвата, фланца). Нулевые значения  $d_i$  указывают на отсутствие смещения вдоль соответствующих осей  $z_i$ .

Матрица однородного преобразования от звена  $i-1$  к звену  $i$  определяется следующим образом:

$$T_i = T_{i-1} A_i, i = 1, 2, \dots, N,$$

где матрица перехода  $A_i$  может быть получена по параметрам Д-Х:

$$A_i(d_i, a_i, q_i, \alpha_i) = \begin{pmatrix} c_i & -c_{\alpha_i} s_i & s_{\alpha_i} s_i & a_i c_i \\ s_i & c_{\alpha_i} c_i & -s_{\alpha_i} c_i & a_i s_i \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $c_i$  и  $s_i$  это  $\sin(q_i)$  и  $\cos(q_i)$  соответственно.

Общая матрица преобразования от базовой системы координат к конечной точке имеет следующий вид:

$${}^0T_7 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4 \cdot {}^4T_5 \cdot {}^5T_6 \cdot {}^6T_7.$$

Следовательно, общий вид матрицы однородных преобразований:

$$T = \begin{pmatrix} R & p \\ 000 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выделяя из матрицы  ${}^0T_7$  необходимые компоненты, получаем векторное представление положения конца манипулятора в базовой системе координат:

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^0T_{7(1,4)} \\ {}^0T_{7(2,4)} \\ {}^0T_{7(3,4)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, используя матрицу  ${}^0T_i$ , можно получить положение любого другого звена.

Ориентация конца манипулятора может быть представлена несколькими способами. Наиболее полным представлением является сама матрица ориентации, образующая верхний левый блок размера (3×3) матрицы  ${}^0T_7$ :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Линейная скорость каждого звена может быть получена путём дифференцирования вектора относительного положения данного звена  $p_i$ .

Но при этом линейная, так же, как и угловая скорость, для каждого звена могут быть заданы как:

$$v_i = J_{v_i} \dot{q}_i; \quad \omega_i = J_{\omega_i} \dot{q}_i,$$

где  $J_{\omega_i}$  – угловой якобиан  $i$ -го звена, причем для данного якобиана  $j$ -й столбец  $i$ -го звена ( $j \leq i$ ) определяется следующим образом:

$$J_{R_{ij}} = z_{j-1},$$

где  $z_{j-1}$  – единичный вектор оси  $j$ -го сочленения, выраженный в базовой системе координат, который вычисляется по следующей формуле:

$$z_{j-1} = R_0^1(q_1)R_1^2(q_2) \cdots R_{j-2}^{j-1}(q_{j-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Кстати, нетрудно убедиться, что вектор  $z_{j-1}$  является третьим столбцом матрицы вращения  $R_0^{j-1}$ , полученной из прямой кинематики [8].

### Динамическая модель БМП ВК

Для математического описания динамики манипуляторной системы БМП ВК весьма эффективным является метод Лагранжа-Эйлера. Процесс построения модели динамики системы этим методом включает построение уравнения Лагранжа-Эйлера с использованием таких понятий, как функция Лагранжа, полная кинетическая и потенциальная энергии манипулятора.

Лагранжиан системы  $L$  определяется как разность обобщенной кинетической  $K$  и обобщенной потенциальной  $P$  энергий [7]:

$$L = K - P.$$

Уравнения движения системы получаются из уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{d\dot{q}_i} L \right) - \frac{dL}{dq_i} = \tau,$$

для  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $\tau_i$  – обобщенная сила (момент) в  $i$ -м суставе.

Общая кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии всех звеньев:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i,$$

причем кинетическая энергия  $i$ -го звена состоит из поступательной и вращательной компонент:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \frac{1}{2} I_{c_i} \omega_i^2,$$

где:  $m_i$ ,  $v_{c_i}$ ,  $\omega_i$ ,  $I_{c_i}$  – соответственно масса, линейная скорость, угловая скорость и тензор инерции относительно центра масс  $i$ -го звена.

Подставляя выражения для скоростей, получим:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (J_{v_i} \dot{q}_i)^T (J_{v_i} \dot{q}_i) + \frac{1}{2} (J_{\omega_i} \dot{q}_i)^T I_{c_i} (J_{\omega_i} \dot{q}_i),$$

$$K_i = \frac{1}{2} \dot{q}_i^T (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I_{c_i} J_{\omega_i}) \dot{q}_i.$$

Выражение для общей кинетической энергии системы принимает следующий вид:

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}.$$

Потенциальная энергия системы в гравитационном поле имеет вид

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n m g^T p_{c_i},$$

где  $g = [0, 0, -g, 0]^T$  – вектор гравитационного ускорения в однородных координатах. Следует отметить, что в рассматриваемом случае вектор гравитационного ускорения направлен против оси  $z$ , а сам вектор гравитационных сил определяется равенством:

$$G(q) = \frac{\partial P}{\partial q} = \sum_{i=1}^n m g^T \frac{\partial p_{c_i}}{\partial q}.$$

Лагранжиан  $L$  можно записать в виде:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - P.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M(q) \dot{q}) = \frac{1}{2} M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{M}(q) \dot{q},$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{2} \dot{q} \frac{\partial M(q)}{\partial q}.$$

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа-Эйлера, матрица сил Кориолиса и центробежных сил приобретает вид:

$$C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial(\dot{q}^T M(q) \dot{q})}{\partial q}.$$

По найденным матрицам  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  и  $M(q)$ , можно получить следующее уравнение динамики антропоморфного манипулятора БМП ВК:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau.$$

Таким образом, математическая модель движения БМП ВК, как объекта управления, является нелинейной многомерной, многосвязной динамической системой 14-го порядка с вектором управляемых переменных  $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)^T$  и векторном управляющий переменных  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7)^T$ .

### Компьютерная апробация математической модели движения БМП ВК

Компьютерная апробация разработанной математической модели движения БМП ВК была произведена в среде Python. Матрицы  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  были получены символьно с помощью библиотеки SymPy. Расчёт динамики БПМ ВК проводился обратным методом Эйлера, с шагом по сетке в 0.01. При этом были приняты следующие параметры протеза:

$$d_1 = 0,06 \text{ м}; m_3 = 0,44 \text{ кг}; a_1 = 0,47 \text{ м}; m_4 = 0,64 \text{ кг}; a_2 = 0,54 \text{ м};$$

$$m_5 = 0,64 \text{ кг}; a_4 = 0,03 \text{ м}; m_6 = 0,34 \text{ кг}; m_1 = 0,4 \text{ кг}; m_7 = 0,3 \text{ кг};$$

$$m_2 = 0,4 \text{ кг}; g = 9,81 \text{ м/с}^2,$$

а также следующие тензоры инерции каждого звена  $I_{c_i}$ :

$$I_{c_1} = \begin{pmatrix} 0,048 & 0 & 0 \\ 0 & 0,048 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}; I_{c_2} = \begin{pmatrix} 0,048 & 0 & 0 \\ 0 & 0,048 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix};$$

$$I_{c_3} = \begin{pmatrix} 0,0529 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0529 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}; I_{c_4} = \begin{pmatrix} 0,077 & 0 & 0 \\ 0 & 0,077 & 0 \\ 0 & 0 & 2,9 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix};$$

$$I_{c_5} = \begin{pmatrix} 0,0534 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0534 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}; I_{c_6} = \begin{pmatrix} 0,028 & 0 & 0 \\ 0 & 0,028 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix};$$

$$I_{c_7} = \begin{pmatrix} 0,025 & 0 & 0 \\ 0 & 0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 9,375 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2 представлены графики изменения углов поворота каждого сустава, при постоянном векторе момента  $\tau$ , у которого все компоненты нулевые, кроме первой, что соответствует постоянному вращающему моменту на первом приводе.

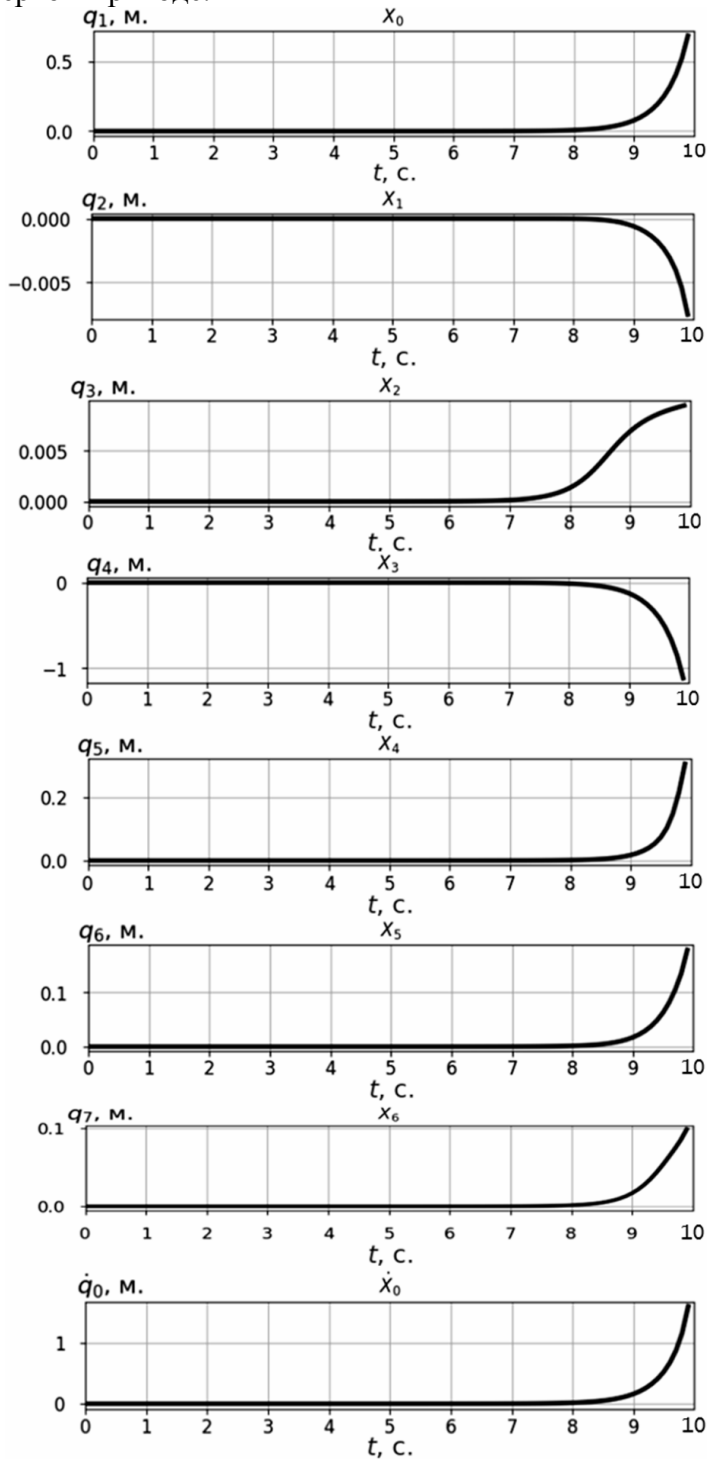


Рис. 2. Динамика изменения углов поворота  $i$ -го сустава

Разработанная математическая модель БМП ВК, позволяет формализовать сложные силовые и инерционные взаимодействия звеньев протеза, решать прямую и обратную задачу динамики, оптимизировать требования к приводам, учитывать реальные нагрузки, а также разрабатывать эффективные алгоритмы управления движением протеза при любых внешних воздействиях и ограничениях.

### **Список литературы**

1. Москвичева В.А., Карякина О.Е. Бионические протезы верхних конечностей: Современное состояние и перспективы развития // Международный студенческий научный вестник. – 2022. – №1. – URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=20913>.
2. Бодин О.Н., Безбородова О.Е., Спиркин А.Н., Шерстнев В.В. Бионические системы управления мобильными робототехническими комплексами. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2022. – 236 с.
3. Платонов А.К., Фролов А.А., Бирюкова Е.В., Пряничников В.Е., Емельянов С.Н. Методы биомехатроники тренажёра руки человека // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2012. – №82. – 40 с.
4. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 480 с.
5. Kabanov A., Balaabanov A. The Modeling of an Anthropomorphic Robot Arm // MATEC Web of Conferences. 2018, vol. 224, p. 02034. DOI: 10.1051/mateconf/201822402034.
6. Dastango P., Ramirez-Serrano A. Non-linear Parameter Identification for Humanoid Robot Components // Proceedings of the 7th International Conference of Control Systems, and Robotics (CDSR'20). Virtual Conference. 2020, p. 148. DOI: 10.11159/cdsr20.148.
7. Абу Ханя Я.Я. Метод и система управления интеллектуальным протезом руки: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. – СПб., 2010. – 173 с.
8. Alwardat M.Y., Alwan H. Geometric Jacobians Derivation and Kinematic Singularity Analysis for 6-DOF Robotic Manipulator // International Journal of Advanced Research in Computer Science. 2025, vol. 16, no. 1, pp. 6-20. DOI: 10.26483/ijarcs.v16i1.7178.

### **References**

1. Moskvicheva V.A., Karyakina O.E. Bionic upper limb prostheses: Current state and development prospects // International Student Scientific Bulletin. 2022, no. 1. URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=20913>.
2. Bodin O.N., Bezborodova O.E., Spirkin A.N., Sherstnev V.V. Bionic control systems for mobile robotic complexes. – Penza: Publ. house of PSU, 2022. – 236 p.
3. Platonov A.K., Frolov A.A., Biryukova E.V., Pryanichnikov V.E., Emelyanov S.N. Methods of biomechatronics of the human hand simulator // Preprint of the IPM n.a. M.V. Keldysh. 2012, no. 82, 40 p.
4. Zenkevich S.L., Yushchenko A.S. Fundamentals of manipulative robot management. – М.: Publ. house of Bauman Moscow State Technical University, 2004. – 480 p.
5. Kabanov A., Balaabanov A. The Modeling of an Anthropomorphic Robot Arm // MATEC Web of Conferences. 2018, vol. 224, p. 02034. DOI: 10.1051/mateconf/201822402034.

6. Dastangoo P., Ramirez-Serrano A. Non-linear Parameter Identification for Humanoid Robot Components // Proceedings of the 7th International Conference of Control Systems, and Robotics (CDSR'20). Virtual Conference. 2020, p. 148. DOI: 10.11159/cdsr20.148.
7. Abu Haniyeh Ya.Ya. Method and control system of an intelligent prosthetic arm: Abstract of the diss. ... cand. of tech. sc. – SPb., 2010. – 173 p.
8. Alwardat M.Y., Alwan H. Geometric Jacobians Derivation and Kinematic Singularity Analysis for 6-DOF Robotic Manipulator // International Journal of Advanced Research in Computer Science. 2025, vol. 16, no. 1, pp. 6-20. DOI: 10.26483/ijarcs.v16i1.7178.

|                                            |                                              |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------|
| <b>Нимирич Николай Сергеевич</b> – студент | <b>Nimirich Nikolay Sergeevich</b> – student |
| evrinik@mail.com                           |                                              |

*Received 16.12.2025*