

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХМАССОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЯТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ С РАДИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС

Савелькаев С.В.

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
Новосибирск, Россия*

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, степени свободы, радиальное распределение масс, центральное поле относительных сил инерции, инвариантность угловых перемещений, закон сохранения импульса, скорость его передачи при взаимодействии

Аннотация. Статья посвящена динамическому анализу замкнутой двухмассовой механической системы с пятью степенями свободы с радиальным распределением ее масс в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел. Ее тела связаны прямолинейным жестким стержнем, концы которого закреплены на этих телах с помощью идеальных шарниров и по отношению к их центру масс, а также по отношению друг к другу совершают сложное переносно-относительное поступательное движение по траекториям в виде окружностей в поле относительных сил инерции взаимодействующих тел. Записано уравнение движения каждого из тел в поле относительных сил инерции в отдельности. Показано, что для не равных начальных импульсов тел замкнутая механическая система характеризуется радиальным распределением масс, в результате чего импульс ее центра масс изменяется по периодическому закону, при этом скорость передачи импульса от одного взаимодействующего тела другому зависит от соотношения их масс.

DYNAMIC ANALYSIS OF A TWO-MASS MECHANICAL SYSTEM WITH FIVE DEGREES OF FREEDOM IN A FIELD OF RELATIVE INERTIAL FORCES WITH A RADIAL MASS DISTRIBUTION

Savel'kaev S.V.

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia

Keywords: two-mass mechanical system, degrees of freedom, radial mass distribution, central field of relative inertial forces, invariance of angular displacements, law of conservation of momentum, velocity of its transfer during interaction

Abstract. This article examines the dynamic analysis of a closed two-mass mechanical system with five degrees of freedom and a radial mass distribution within the relative inertial field of its interacting bodies. The bodies are connected by a rigid rectilinear rod, the ends of which are fixed to the bodies by ideal hinges. The bodies, relative to their centers of mass and relative to each other, perform complex translational motion along circular trajectories within the relative inertial field of the interacting bodies. The equation of motion for each body within the relative inertial field is written separately. It is shown that for unequal initial momenta of the bodies, the closed mechanical system is characterized by a radial mass distribution. As a result, the momentum of its center of mass varies periodically, with the rate of momentum transfer from one interacting body to another depending on the ratio of their masses.

Введение

В работах [1, 2] рассмотрена замкнутая двухмассовая механическая система (МС2) с числом степеней свободы равным $N = 5$. Проведен ее

динамический анализ в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел. Показано, что для коллинеарных и противоположно направленных начальных импульсов ее тел с равными модулями распределение масс тел МС2 в системе отсчета ее центра масс (ЦМ) C диаметрально и его импульс сохраняется

В предложенной работе показано, что если один из начальных импульсов тел МС2 равен нулю, то распределение масс МС2 является радиальным. Для такого случая фаза импульса ЦМ C МС2 изменяется по периодическому закону с сохранением его модуля, что удовлетворяет закону сохранения энергии. Фазовое изменение импульса вызвано взаимодействием тел МС2 при конечной скорости передачи импульса от одного тела к другому.

Энергетический анализ и принцип Д'Аламбера

Анализируемая МС2 из работ [1, 2] показана на рисунке 1 и содержит два тела m_1 и m_2 , которые взаимодействуют через прямолинейный жесткий стержень длиной $R = \text{const}$. Концы этого стержня образуют с телами m_1 и m_2 гибкую связь в виде идеальных шарниров.

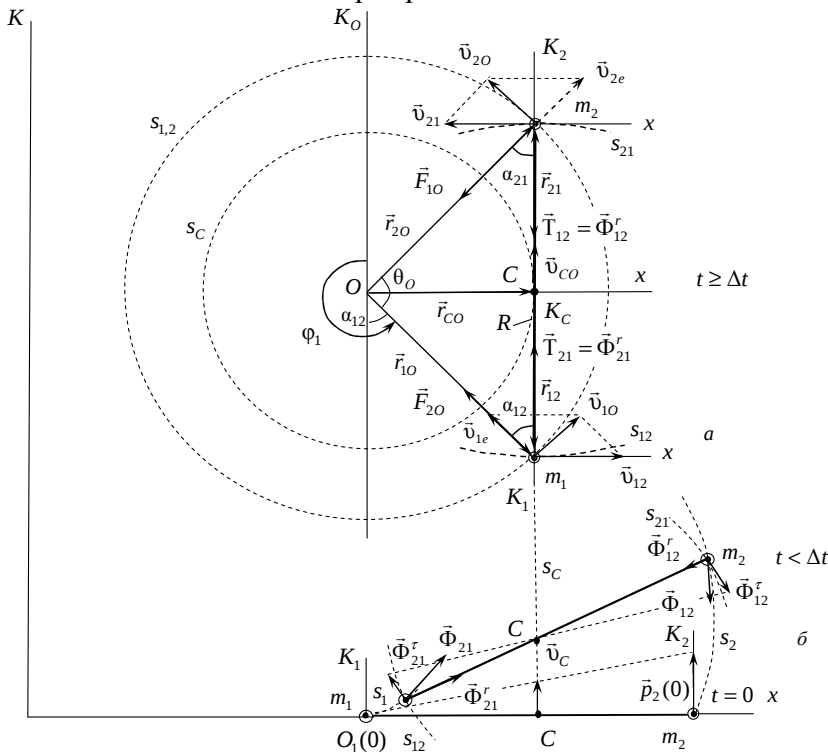


Рис. 1. Двухмассовая механическая система в стационарном состоянии с радиальным распределением масс тел m_1 и m_2 – а и ее переходной процесс – б

Количество независимых координат МС2 равно $N = 5$ и определяется четырьмя полярными координатами r_{10} , ϕ_{10} , r_{20} , ϕ_{20} тел m_1 и m_2 в системе отчета K_O ее инерционного домена (ИД) с силовым центром O . С этим

центром O не совпадает с ЦМ C МС2, с которым связана система отсчета K_C . Дополнительной пятой независимой координатой является одна из двух зависимых полярных координат $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$ тел m_1 и m_2 в системах отсчета K_2 и K_1 . Оси координат лабораторной системы отсчета K и осей координат поступательно движущихся в ней систем отсчета K_O, K_C, K_1 и K_2 всегда параллельны.

Рассмотрим случай, когда начальный импульс тела m_1 в системе отсчета K в момент времени $t = 0$ равен $\vec{p}_1(0) = 0$ (см. рис. 1, б). В результате чего при равных массах $m_1 = m_2$ положение мгновенного центра $O_1(0)$ начальных импульсов $\vec{p}_1(0)$ и $\vec{p}_2(0)$ тел m_1 и m_2 МС2 совпадает с начальным положением тела m_1 и ЦМ C получит в системе отсчета K начальную скорость $\vec{v}_C = \vec{p}_2(0) / m \neq 0$.

Для удобства анализа переходного процесса МС2 во время $t < \Delta t$ (рис. 1, а) и ее движения в стационарном состоянии во время $t > \Delta t$ (рис. 1, б) с радиальным распределением представим ее на одном рисунке 1.

Динамический анализ МС2 начнем с ее стационарного состояния для которого система отсчета K_O центра O ИД неподвижна в системе отсчета K (см. рис. 1, а). Радиальное распределение тел m_1 и m_2 в этой системе отсчета K_O определяется углом

$$\theta_0 = \arccos(p_1(0)/p_2(0)) = \varphi_{1O} - \varphi_{2O} = \alpha_{12} + \alpha_{21} = \pi / 2, \quad (1)$$

который в стационарном состоянии МС2 (см. рис. 1, а) характеризует запаздывание фазы φ_{1O} переносно-относительного поступательного движения тела m_1 относительно фазы φ_{2O} переносно-относительного поступательного движения тела m_2 ; углы α_{12} и α_{21} (см. рис. 1, а) подлежат дальнейшему определению.

С учетом абсолютных скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1e} + \vec{v}_{12}; \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2e} + \vec{v}_{21} \quad (2)$$

тел m_1 и m_2 суммарную кинетическую энергию T МС2 в ее стационарном состоянии (см. рис. 1, а) при радиальном распределении $\theta_0 = \pi/2$ (1) выразим в системе отсчета K в виде [1, 2]

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 \pm U, \quad (3)$$

где $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2O} = \vec{\omega}_{CO} \times \vec{r}_{2O}$ и $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1O} = \vec{\omega}_{CO} \times \vec{r}_{1O}$ – переносные скорости тел m_1 и m_2 ; $\vec{r}_{1O}$ и $\vec{r}_{2O}$ – радиус-векторы их переносно-относительного поступательного движения по окружности $s_{1,2}$ (общей при $m_1 = m_2$); $\vec{\omega}_{CO} = \vec{\omega}_{1O} = \vec{\omega}_{2O}$ – угловая скорость переносно-относительного

поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O ; U – обобщенный кинетический потенциал [4]:

$$\begin{aligned} U &= m_1 v_{2O} v_{12} \cos \alpha_{12} + m_2 v_{1O} v_{21} \cos \alpha_{21} = \\ &= m_1 \omega_O r_{2O} \omega_{12} R \cos \alpha_{12} + m_2 \omega_O r_{1O} \omega_{21} R \cos \alpha_{21}, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_{12} и α_{21} – углы между радиус-векторами $\vec{r}_{1O}^{\wedge} \vec{r}_{21}^{\wedge}$ и $\vec{r}_{2O}^{\wedge} \vec{r}_{12}^{\wedge}$, которые зависят от масс тел m_1 и m_2 , подлежащие дальнейшему определению.

Сумма первого и второго слагаемых

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2e}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2C}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1C}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2, \quad (5)$$

входящих в (3) является кинетической энергией переносного движения тел m_1 и m_2 МС2, которое характеризуется их переносными импульсами $\vec{p}_{1e} = m_1 \vec{v}_{2C}$ и $\vec{p}_{2e} = m_2 \vec{v}_{1C}$ (3) вместе с собственными системами отсчета K_2 и K_1 диаметрально противоположных тел m_2 и m_1 . В соответствии с (2) эти импульсы определяют скорость $\vec{v}_C = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / m = (\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{12} + \vec{p}_{2e} + \vec{p}_{21}) / m = (\vec{p}_{1e} + \vec{p}_{2e}) / m$ ЦМ C МС2 в системе отсчета K и, следовательно, физический смысл T_C .

Сумма третьего и четвертого слагаемых $T_r = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2$ является кинетической энергией относительного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 и тела m_2 в системе отсчета K_1 , а обобщенный потенциал U (4) представляет собой потенциальную функцию центрального динамического поля относительных сил инерции взаимодействующих тел m_1 и m_1 МС2, каждое из которых одновременно участвует в переносном и относительном поступательных движениях $m_1 \vec{v}_{2C} \cdot \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{1C} \cdot \vec{v}_{21}$.

Учитывая, что обобщенный кинетический потенциал U (4), зависит от угловых скоростей $\omega_C = \omega_{1O} = \omega_{2O}$, ω_{12} , ω_{21} и координат r_{1O} , r_{2O} , r_{12} , r_{21} тел m_1 , m_2 и определяет их линейные скорости: $v_{1e} = v_{2C} = \omega_C r_{2C}$; $v_{2e} = v_{1C} = \omega_C r_{1C}$; $v_{12} = \omega_{12} r_{12}$; $v_{21} = \omega_{21} r_{21}$, то по определению он является потенциальной функцией МС2. Тогда для $m_1 = m_2$, когда в выражении для T_C (5) допустима перестановка вида

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{2O}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{1O}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2O}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CO}^2,$$

лагранжиан L МС2 можно представить в виде

$$\begin{aligned} L &= T_C + T_r - U = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{1O}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{2O}^2 + \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{12}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{21}^2 - U = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \omega_{CO}^2 r_{1O}^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{CO}^2 r_{2O}^2 + \frac{1}{2} m_1 \omega_{12}^2 R^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_{21}^2 R^2 - U. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения углов α_{12} и α_{21} (4) примем за условие перехода МС2 в стационарный режим равенство модулей импульсов $p_{10} = p_{20}$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O в криволинейных координатах

$$m_1 \omega_{CO} r_{10} = m_2 \omega_{CO} r_{20}, \quad (7)$$

где радиусы r_{10} и r_{20} , которые с учетом рисунка 1, a выразим в виде:

$$r_{10} = R \cos \alpha_{12} \text{ и } r_{20} = R \cos \alpha_{21}. \quad (8)$$

Поочередная подстановка радиусов r_{10} и r_{20} (8) в (7) позволяет определить амплитуды:

$$A_1 = c_1 \cos \alpha_{21}; A_2 = c_2 \cos \alpha_{12}, \quad (9)$$

стационарного переносно-относительного поступательного движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O (при рассмотрении их движения как гармонического колебания относительно центра O ИД), где

$$c_1 = \frac{m_1}{m_2} R; c_2 = \frac{m_2}{m_1} R \quad (10)$$

– амплитудные коэффициенты.

Одновременная подстановка радиусов r_{10} и r_{20} (8) в (7) с учетом того, что $\alpha_{12} + \alpha_{21} = \pi / 2$ позволяет найти углы:

$$\alpha_{12} = \varphi_{12} - \varphi_{10} = \text{arccctg}(\xi_{12}); \alpha_{21} = \varphi_{21} - \varphi_{20} = \text{arctg}(\xi_{21}), \quad (11)$$

характеризующие разность фаз движения тела m_1 в системах отсчета K_2 и K_O , а также тела m_2 в системах отсчета K_1 и K_O в зависимости от соотношения масс тел m_1 и m_2 :

$$\xi_{12} = \xi_{21}^{-1}; \xi_{21} = m_2 / m_1. \quad (12)$$

Согласно рисунку 1, a фаза φ_{20} движения тела m_2 в системе отсчета K_O связана с фазой движения φ_{21} этого тела m_2 в системе отсчета K_1 выражением

$$\varphi_{21} - \varphi_{20} = \alpha_{21}. \quad (13)$$

С учетом выражения (13) и повторного использования рисунка 1, a фазы φ_{10} и φ_{20} движения тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O связаны с фазой движения φ_{21} тела m_2 в системе отсчета K_1 преобразованиями:

$$\varphi_{10} = \varphi_{21} + \varphi_1; \varphi_{20} = \varphi_{21} + \varphi_2, \quad (14)$$

где $\varphi_1 = \varphi_{10} - \varphi_{21} = \pi + \alpha_{12}$ и $\varphi_2 = \pi + \alpha_{21}$ – угол запаздывания фазы φ_{10} переносно-относительного поступательного движения тела m_1 в системе отсчета K_O относительно фазы φ_{21} переносно-относительного поступательного движения тела m_2 в системе отсчета K_1 (см. рис. 1, a) и аналогичный угол запаздывания (на рис. 1, a не показан) тела m_2 в системе

отсчета K_O относительно фазы ϕ_{12} переносно-относительного поступательного движения тела m_1 в системе отсчета K_2 .

Так как лагранжиан L (6) явно не зависит от времени t и рассматриваемая МС2 внешне замкнута (равнодействующая всех внешних сил равна нулю $\sum_i \vec{F}_i = 0$), то частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial L}{\partial q_{ij}} = 0, K_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_O} + \sum_{i,j} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}_O}; i, j = 1, 2; i \neq j \quad (15)$$

по обобщенным координатам $q_i = r_{iO}$ и $q_{ij} = r_{ij} = R$ являются интегралами движения ее тел m_i по геодезическим траекториям $s_{i,j}$ в системе отсчета K_O и соответственно геодезическими траекториями s_{ij} в системах отсчета K_1 и K_2 (см. рис. 1, *a* и *б*), а частные производные по угловым скоростям $\dot{\phi}_{CO} = \omega_{CO} = \omega_{1O} = \omega_{2O}$ и $\dot{\phi}_{ij} = \omega_{ij}$ определяют суммарный кинетический момент K_z МС2 относительно оси z системы отсчета K_O (на рис. 1, *a* перпендикулярна плоскости чертежа). Первый интеграл (15) определяет уравнения движения тел m_i в виде принципа Д'Аламбера или второго закона Ньютона в инерциальных системах отсчета K и K_O :

$$\vec{\Phi}_{1O} + \vec{F}_{2O} = 0; \vec{\Phi}_{2O} + \vec{F}_{1O} = 0 \text{ или } m_1 \vec{a}_{1O} = \vec{F}_{2O}; m_2 \vec{a}_{1O} = \vec{F}_{1O}, \quad (16)$$

где в первом уравнении: $\vec{\Phi}_{1O} = -m_1 \vec{a}_{1O} = m_1 \omega_{CO}^2 \vec{r}_{1O}$ – сила инерции тела m_1 , которое вместе с собственной системой отсчета K_1 совершает переносное поступательное движение со скоростью $\vec{v}_{1C}$ с собственным переносным импульсом $\vec{p}_{1C} = m_1 \vec{v}_{1C}$ по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 1, *a*), общей для систем отсчета K и K_C , так как система отсчета K_C неподвижна;

$\vec{F}_{2O} = \frac{\partial U}{\partial r_{2O}} \cdot \vec{r}_{1O}^0 = m_2 \omega_{CO} \omega_{21} r_{21} \cdot \vec{r}_{1O}^0$ – вектор, образованный компонентой

относительной силы инерции тела m_2 на направление вектора $-\vec{r}_{1O}$, см. рис. 1, *a*, где тело m_2 одновременно участвует в переносном $m_2 \vec{v}_{1C}$ в системе отсчета K и относительном $m_2 \vec{v}_{21}$ в системе отсчета K_1 (переносно-относительном)

поступательном движении $m_2 \vec{v}_{1C} \times \vec{v}_{21}$; $\vec{r}_{1O}^0 = -\frac{\vec{r}_{1O}}{r_{1O}}$ – единичный коллинеарный

и противоположно направленный вектор вектору $\vec{r}_{1O}$. Вектор $\vec{F}_{2O}$ участвует в формировании ИД МС2 с силовым центром O и приложен к телу m_1 в направлении к этому центру, как показано на рисунке 1, *a*;

во втором уравнении: $\vec{\Phi}_{20} = -m_2 \vec{a}_{20} = m_2 \omega_{CO}^2 \vec{r}_{20}$ – сила инерции тела m_2 , которое вместе с собственной системой отсчета K_2 совершает переносное поступательное движение со скоростью $\vec{v}_{20}$ с собственным переносным импульсом $\vec{p}_{20} = m_2 \vec{v}_{20}$ по траектории $s_{1,2}$ (см. рис. 1, а) общей для систем отсчета K и K_O , так как система отсчета K_O неподвижна;

$$\vec{F}_{10} = \frac{\partial U}{\partial r_{10}} \cdot \vec{r}_{20}^0 = m_1 \omega_O \omega_{12} r_{12} \cdot \vec{r}_{20}^0 \quad - \quad \text{вектор, образованный компонентой}$$

относительной силы инерции тела m_1 на направление вектора $-\vec{r}_{20}$, см. рис. 1, а, где тело m_1 одновременно участвует в переносном $m_1 \vec{v}_{20}$ в системе отсчета K и относительном $m_1 \vec{v}_{12}$ в системе отсчета K_2 (переносно-относительном) поступательном движении $m_1 \vec{v}_{20} \times \vec{v}_{12}$; $\vec{r}_{20}^0 = -\frac{\vec{r}_{20}}{r_{20}}$ – единичный коллинеарный

и противоположно направленный вектор вектору $\vec{r}_{20}$. Вектор $\vec{F}_{10}$ участвует в формировании ИД МС2 с силовым центром O и приложен к телу m_2 в направлении к этому центру, как показано на рис. 1, а.

Второй интеграл движения (15) определяет принцип Д'Аламбера системах отсчета K_1 и K_2 . Для $R = \text{const}$ мы его рассматривать не будем.

Таким образом, для МС2 с числом степеней свободы $N = 5$ векторы $\vec{F}_{10}$ и $\vec{F}_{20}$ (16) образуют ИД, который является результатом одновременного участия тел m_1 и m_2 в переносно-относительном поступательном движениях $m_1 \vec{v}_{20} \cdot \vec{v}_{12}$ и $m_2 \vec{v}_{10} \cdot \vec{v}_{21}$. В работе [5] поле этого ИД рассматривается как динамическое гравитационное поле. Физически оно является разновидностью поля Кориолиса [3].

Таким образом, для радиального распределения $\theta_0 = \pi / 2$, (1) масс МС2 с числом степеней свободы $N = 5$ произведение ее суммарной массы на ускорение $\vec{a}_C = \vec{a}_{CO}$ ее ЦМ C равно действию на неё поля относительных сил инерции $\vec{F}_{10}$ и $\vec{F}_{20}$ ее взаимодействующих тел так, что циркуляция импульса $\vec{p}_C = \vec{p}_{CO}$ МС2 по замкнутому контуру s_C равна нулю:

$$d\vec{p}_C / dt = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} \neq \overline{\text{const}}; \quad \Gamma = \oint \vec{p}_C d\vec{l} = 0. \quad (17)$$

Инвариантность угловых перемещений и частное решение уравнений движения

Так как при радиальном распределении $\theta_0 = \pi / 2$ (1) система отсчета K_C ЦМ C не является инерциальной, то по аналогии с работами [1, 2] необходимо установить связь абсолютного времени системы отсчета K с относительным временем в системах отсчета K_C , K_1 и K_2 . Для этого

выпишем принцип Д' Аламбера (16) тля тел m_1 и m_2 в системе отсчета K в криволинейных координатах:

$$m_1 \omega_{10}^2 r_{10} = m_2 \omega_{10} \omega_{21} R; m_2 \omega_{20}^2 r_{20} = m_1 \omega_{20} \omega_{12} R, \quad (18)$$

который с учетом радиусов r_{10} и r_{20} (8) представим в виде

$$m_1 \omega_{10} \cos \alpha_{12} = m_2 \omega_{21}; m_2 \omega_{20} \cos \alpha_{21} = m_1 \omega_{12}. \quad (19)$$

Из (19) с учетом того, что в стационарном состоянии МС2 $\omega_{C0} = \omega_{10} = \omega_{20}$ найдем:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \omega_{C0} \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha_{21}; \omega_{21} = \omega_{C0} \frac{m_1}{m_2} \cos \alpha_{12}; \\ \omega_C &= \omega_{12} + \omega_{21} = \omega_{C0} \left[\frac{m_1}{m_2} \cos \alpha_{12} + \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha_{21} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Применение преобразований (20) к инварианту [1, 2]

$$\Delta\phi = \Delta\phi_O = \Delta\phi_C = \Delta\phi_{12} = \Delta\phi_{21} \quad (21)$$

определяет собственное время t_1 , t_2 и t_C в системах отсчета K_1 , K_2 и K_C при едином начальном времени $t_0 = 0$:

$$t_1 = \frac{t}{\frac{m_1}{m_2} \cos \alpha_{12}}; t_2 = \frac{t}{\frac{m_2}{m_1} \cos \alpha_{21}}; t_C = \frac{t}{\frac{m_1}{m_2} \cos \alpha_{12} + \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha_{21}}; t_O = t, \quad (22)$$

где $\Delta\phi_O = \omega_O \Delta t_O$ и $\Delta t_O = t_O - t_0$ – угловое приращение и приращение времени t_O в системе отсчета K_O центра O ИД, который в стационарном состоянии МС2 неподвижен в системе отчета K .

Инвариантность угловых перемещений $\Delta\phi$ (21) в системах отсчета K , K_O , K_C , K_1 и K_2 обеспечивает возможность движения МС2 без ее разрушения и исходит из необходимости одновременности событий во всех этих системах отсчета [1, 2].

Таким образом, для обеспечения инвариантности угловых перемещений $\Delta\phi$ (21) необходимо, чтобы время t_1 и t_2 в собственных системах отсчета K_1 и K_2 взаимодействующих тел m_1 и m_2 и в системе отсчета K_C их центра масс по отношению ко времени t_O в системе отсчета K_O их инерционного домена протекало по разному. Время в системе отсчета K_O и в какой-либо другой инерциальной системе отсчета K абсолютно $t_O = t$.

Частное решение двух последних уравнений (16) в системе отсчета K_O для радиального распределения $\theta_0 = \pi/2$ (1) с учетом преобразований (14) и амплитуд (9) представим в виде:

$$\begin{aligned} x_{1O} &= A_1 \cos \phi_{1O} = -A_1 \cos(\phi_{21} + \alpha_{12}); y_{1O} = A_1 \sin \phi_{1O} = -A_1 \sin(\phi_{21} + \alpha_{12}); \\ x_{2O} &= A_2 \cos \phi_{2O} = A_2 \cos(\phi_{21} - \alpha_{21}); y_{2O} = A_2 \sin \phi_{2O} = A_2 \sin(\phi_{21} - \alpha_{21}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varphi_{21} = \omega_{CO}t$ – полярная координата в абсолютном времени $t_0 = t$ (22), последовательное приращение которой удовлетворяет угловому инварианту $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{CO} = \Delta\varphi_{21}$ при $t_0 = 0$ (21); $\omega_{CO} = \omega_{1O} = \omega_{2O} = \frac{p_2(0)}{m_2 R}$ – угловая скорость поступательного движения ЦМ C МС2 и ее тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O в стационарном состоянии МС2.

Существенным отличием амплитудных коэффициентов A_1 и A_2 (9) МС2 с радиальным распределением $\theta_0 = \pi/2$ (1) от аналогичных коэффициентов A_1 и A_2 [1, 2] МС2 с диаметральной распределением $\theta_C = -\pi$ являются наличие в первых направляющих косинусов $\cos\alpha_{12}$ и $\cos\alpha_{21}$.

Динамический анализ переходного процесса

Так как в момент времени $t = 0$ телу m_2 сообщен начальный импульс $\vec{p}_2(0)$, направленный параллельно оси y системы отсчета K , как показано на рис. 1, б, то скорость $\vec{v}_C$ ЦМ C тел m_1 и m_2 в системе отсчета K и их угловые скорости ω_{12} и ω_{21} в системах отсчета K_2 и K_1 составят:

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{p}_2(0)}{mR}; \omega_{12} = 0; \omega_{21} = \frac{p_2(0)}{m_2 R} \quad (24)$$

где $m = m_1 + m_2$.

В результате взаимодействия тел m_1 и m_2 стержнем R скалярное значение импульса $p_{21} = m_2 \omega_{21} R$ тела m_2 в системе отсчета K_1 будет уменьшаться, тогда как скалярное значение импульса $p_{12} = m_1 \omega_{12} R$ тела m_1 в системе отсчета K_2 будет увеличиваться. Передача импульса p_{21} тела m_2 телу m_1 выполняется при соблюдении принципа наименьшего действия и происходит во времени $t < \Delta t$ при уменьшении ω_{21} и увеличении ω_{12} с сохранением суммарного кинетического момента МС2 относительно ее ЦМ C $dK_{Cz} / dt = \text{const}$, а также при постоянном и прямолинейном его движении $\vec{v}_C = \overline{\text{const}}$ параллельно оси y (на расстоянии $y_C = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = \text{const}$) системы отсчета K .

Приближенную математическую модель переходного процесса в системе отсчета K в абсолютном времени t построим исходя из принципа Д'Аламбера $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} = 0$ (16), записанного с учетом аксиомы связи для относительной силы инерции $\vec{R} = \vec{\Phi}_{21}$ [6], в предположении того, что для большей части времени $t < \Delta t$ переходного процесса величина $\omega_{12} \ll \omega_{21}$.

С учетом этого анализ переходного процесса MC2 можно выполнить на основе анализа движения ее тела m_1 по координатным уравнениям вида:

$$m_1 \ddot{x}_1 = \Phi_{21x}; m_1 \ddot{y}_1 = \Phi_{21y}, \quad (25)$$

$$\text{где } \Phi_{21x} = -m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21}; \Phi_{21y} = -m_2 \omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} \quad (26)$$

– проекции относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ на ось x системы отсчета K , которые в развернутой форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{21x} &= -dp_{21x} / dt = -m_2 d^2 R \cos \varphi_{21} / dt^2 = m_2 R (\omega_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \varepsilon_{21} \sin \varphi_{21}); \\ \Phi_{21y} &= -dp_{21y} / dt = -m_2 d^2 R \sin \varphi_{21} / dt^2 = m_2 R (\omega_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \varepsilon_{21} \cos \varphi_{21}), \end{aligned} \quad (27)$$

где первые слагаемые $\Phi_{21x}^r = m_2 R \omega_{21}^2 \cos \varphi_{21}$ и $\Phi_{21y}^r = m_2 R \omega_{21}^2 \sin \varphi_{21}$ являются проекциями радиальной компоненты $\Phi_{21}^r = m_2 \omega_{21}^2 R$ относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21} = m_2 \omega_{21}^2 \vec{r}_{21}$ (см. рис. 1, б), а вторые – проекциями $\Phi_{21x}^t = m_2 \varepsilon_{21} R \sin \varphi_{21}$ и $\Phi_{21y}^t = m_2 \varepsilon_{21} R \cos \varphi_{21}$ ее тангенциальной компоненты $\Phi_{21}^t = m_2 \varepsilon_{21} R$ на ось x системы отсчета K .

Тангенциальная компонента $\vec{\Phi}_{21}^t$ характеризует передачу части модуля относительного импульса $p_{21} = m_2 v_{21}$ рабочего тела m_2 опорному телу m_1 , которое за счет этой передачи получает приращение переносного импульса $\Delta p_1 = m_1 \Delta v_1$. Радиальные компоненты $\vec{\Phi}_{12}^r$ и $\vec{\Phi}_{21}^r$ влияют только на изменение фаз импульсов $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ и $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ тел m_2 и m_1 .

Переходной процесс MC2 завершается в момент времени $t = \Delta t$ при выполнении условия стационарности в виде равенства модулей импульсов $p_{10} = p_{20}$ тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_O , которая в текущем времени $t \geq \Delta t$ неподвижна в системе отсчета K , когда $\omega_{12} = \omega_{21}$ и $\Phi_{12}^t = \Phi_{21}^t = 0$.

Стационарное движение MC2 в системе отсчета K_O в текущем времени $t \geq \Delta t$ с учетом (16) описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_{10} &= \vec{F}_{20}; m_2 \vec{a}_{10} = \vec{F}_{10}; \\ K_{Oz} &= m_1 \omega_O r_{10}^2 + m_2 \omega_O r_{20}^2 + m_1 \omega_{12} R^2 + m_2 \omega_{21} R^2 + \\ &+ m_1 \omega_{12} r_{10} R \cos \alpha_{12} + m_2 \omega_{21} r_{20} R \cos \alpha_{21}, \end{aligned} \quad (28)$$

где K_{Oz} – кинетический момент MC2 в системе отсчета K_O , в котором первые два члена являются моментом импульса $p_C = m v_C$ ЦМ C относительно оси z системы отсчета K_O , третий и четвертый члены – моментами импульсов $p_{12} = m_1 v_{12}$ и $p_{21} = m_2 v_{21}$ тел m_1 и m_2 относительно оси z систем отсчета K_2 и K_1 и пятый и шестой – моментами импульсов $m_1 \omega_{12} R \cos \alpha_{12}$ и $m_2 \omega_{21} R \cos \alpha_{21}$ относительных сил инерции $\vec{F}_{10}$ и $\vec{F}_{20}$ относительно оси z системы отсчета K_O .

Для завершения построения математической модели переходного процесса МС2 введем еще одно допущение. Считаем, что передача относительного импульса $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21}$ рабочего тела m_2 опорному телу m_1 осуществляется по линейному закону $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_{21}$ в абсолютном времени t . Такое допущение обеспечивает возможность исключения тангенциальной компоненты $\vec{\Phi}_{21}^r$ (25) из правой части уравнений (25) путем добавления к их левым частям линейной функции вида $\mu_1 \vec{v}_1$, что позволяет свести эти уравнения к характеристическому виду:

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_{21}\dot{q}_1 = c_1\omega_{21}^2 \cos \varphi_{21}, \quad (29)$$

где $\gamma_{21} = \mu_1 / 2m_1$ – коэффициент передачи относительного импульса $\vec{p}_{21} = m_2 \vec{v}_{21}$ от рабочего тела m_2 опорному телу m_1 , подлежащий определению; μ_1 – некоторый неизвестный коэффициент, характеризующий приращение скорости $\vec{v}_1$ опорного тела m_1 за счет приращения его импульса $\Delta \vec{p}_1 = m_1 \Delta \vec{v}_1$; $c_1 = m_2 R / m_1 = \xi_{21} R$ – амплитудный коэффициент вида (10); $\varphi_{21} = \omega_{co} t$ – полярная координата решений (23), выраженная через угловую скорость ω_{co} ЦМ C в системе отсчета K_o , определенную начальными условиями

$$\omega_{co} = \omega_{21} = \frac{p_2(0)}{m_2 R}; \quad r_{co} = x_c(0), \quad (30)$$

где $x_c(0)$ и r_{co} – координата ЦМ C в системе отсчета K при $t=0$ и радиус его движения в системе отсчета K_o при $t \geq \Delta t$ в стационарном состоянии МС2 (рис. 1, а).

Необходимость одновременного выполнения равенств (30) обусловлена требованием к сохранению начальной кинетической энергии $T(0)$ МС2 и ее кинетической энергии $T(t \geq \Delta t)$ в стационарном состоянии в виде равенства $T(0)=T(t \geq 0)$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения вида (29) есть сумма частного и общего решений. Его частное решение в системе отсчета K_o в абсолютном времени $t_o = t$ будем искать в виде (23):

$$x_{10} = -A_1 \cos \varphi_{10} = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \alpha_{12}); \quad y_{10} = -A_1 \sin \varphi_{10} = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \alpha_{12}), \quad (31)$$

где A_1 – амплитуда, которая в первом приближении определена выражением (9).

Определим амплитуду A_1 , входящую в решение (31). Для этого представим уравнение (29) в комплексной форме

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_{21}\dot{q}_1 = c_1\omega_{co}^2 \exp j\omega_{co} t, \quad (32)$$

где q_1 – обобщенная координата.

Решение комплексного уравнения (32) будем искать в виде

$$q_1 = B_1 \exp j\omega_{co} t, \quad (33)$$

где B_1 – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (33) по времени t дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\omega_{co} \exp j\omega_{co} t; \ddot{q}_1 = -B_1\omega_{co}^2 \exp j\omega_{co} t. \quad (34)$$

Подстановка (34) в уравнение (32) сводит его к виду

$$-B_1\omega_{co}^2 + 2j\gamma_{21}B_1\omega_{co} = c_1\omega_{co}^2. \quad (35)$$

Из (35) комплексную амплитуду B_1 можно выразить в виде

$$B_1 = \frac{c_1\omega_{co}^2}{\omega_{co}^4 + 4\gamma_{21}^2\omega_{co}^2}(-\omega_{co}^2 - j2\gamma_{21}\omega_{co}) = A_1 \exp(j\phi_1), \quad (36)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где $A_1 = |B_1|$.

С учетом того, что амплитуда B_1 (36) находится в III четверти ее комплексной плоскости ее модуль $A_1 = |B_1|$ и угол запаздывания ϕ_1 (14) можно определить следующим образом:

$$A_1 = c_1 / \sqrt{1 + \xi_{21}^2}; \phi_1 = \pi + \alpha_{12}; \alpha_{21} = \arctg \xi_{21}; \alpha_{12} = \pi/2 - \alpha_{21}, \quad (37)$$

где $\xi_{21} = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_{21} / \omega_{co}$ – параметр передачи, который принят равным отношению масс $\xi_{21} = m_2 / m_1$ (12)

$$\xi_{21} = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_{21} / \omega_{co} = m_2 / m_1, \quad (38)$$

что подлежит дальнейшему обоснованию.

Выражение (38) определяет коэффициент передачи γ_{21} в виде

$$\gamma_{21} = m_2\omega_{co} / 2m_1, \quad (39)$$

что исключает необходимость нахождения коэффициента μ_1 (29).

Согласно связи круговых функций можно записать

$$\arctg \xi_{21} = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_{21}^2}); \text{arcctg } \xi_{12} = \arcsin(1 / \sqrt{1 + \xi_{12}^2}). \quad (40)$$

Учитывая, что согласно (37) $\arctg \xi_{21} = \alpha_{21}$ и $\text{arcctg } \xi_{12} = \alpha_{12}$ из (40) при $m_1 = m_2$ получим

$$\cos \alpha_{21} = 1 / \sqrt{1 + \xi_{21}^2}; \sin \alpha_{12} = \cos \alpha_{21} = 1 / \sqrt{1 + \xi_{12}^2} = 1 / \sqrt{1 + \xi_{21}^2}. \quad (41)$$

С учетом (41) амплитуду A_1 (37) и A_2 можно представить в виде (9)

$$A_1 = c_1 \cos \alpha_{21}; A_2 = c_2 \cos \alpha_{12}, \quad (42)$$

первая из которых в ее сравнении с амплитудой A_1 (9) обосновывает правильность выбора $\xi_{21} = 2\gamma_{21} / \omega_{co} = m_2 / m_1$, принятого в (38).

Равенство вида

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} = \arctg \xi_{21} = \text{arcctg } \xi_{12} = \arccos(1 / \sqrt{1 + \xi_{21}^2}) = \arcsin(1 / \sqrt{1 + \xi_{12}^2}) \quad (43)$$

выражает баланс фаз и амплитуд периодического движения МС2 в ее стационарном состоянии (см. рис. 1, а), выполняющийся при $m_1 = m_2$.

Далее были записаны общие решения:

$$x_O(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); \quad y_O(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (44)$$

однородных дифференциальных уравнений вида:

$$\ddot{q}_O + 2\gamma_1 q_O = 0, \quad (45)$$

которые характеризуют переносную часть движения МС2 вместе с центром О ИД во время ее переходного процесса.

Сумма решений (31) и (44) дает решения дифференциальных уравнений (25) в системе отсчета K в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_{21}t) - A_1 \cos(\varphi_{21} + \alpha_{21}); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x}\gamma_{21} \exp(-2\gamma_{21}t) + A_1\omega_{21} \sin(\varphi_{21} + \alpha_{21}); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_{21}t) - A_1 \sin(\varphi_{21} + \alpha_{21}); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y}\gamma_{21} \exp(-2\gamma_{21}t) - A_1\omega_{21} \cos(\varphi_{21} + \alpha_{21}), \end{aligned} \quad (46)$$

где $\varphi_{21} = \omega_{CO}t$ – полярная координата, последовательное приращение которой удовлетворяет инварианту $\Delta\varphi = \Delta\varphi_{CO} = \Delta\varphi_{21}$ (21); $\omega_{CO} = \omega_{21} = \frac{p_2(0)}{m_2 R}$ – угловая скорость ЦМ C в стационарном состоянии МС2 (30).

Для нулевых начальных условий опорного тела m_1 примем $x_1(t=0) = 0$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$ и $y_1(t=0) = 0$, $\dot{y}_1(t=0) = 0$. Тогда с учетом того, что $\xi_{21} = 2\gamma_{21}t = 2\gamma_{21} / \omega_{21}$ из (46) найдем:

$$\begin{aligned} C_{1x} &= A_1 (\cos \alpha_{21} - \xi_{21}^{-1} \sin \alpha_{21}); \quad C_{2x} = A_1 \xi_{21}^{-1} \sin \alpha_{21}; \\ C_{1y} &= A_1 (\sin \alpha_{21} + \xi_{21}^{-1} \cos \alpha_{21}); \quad C_{2y} = -A_1 \xi_{21}^{-1} \cos \alpha_{21}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставив (47) в (46), получим общее решение дифференциальных уравнений (25) как функции от полярной координаты φ_{21} :

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 (\cos \alpha_{21} - \xi_{21}^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21}\varphi_{21})) \sin \alpha_{21} - \cos(\varphi_{21} + \alpha_{21})); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1\omega_{21} (\exp(-\xi_{21}\varphi_{21}) \sin \alpha_{21} - \sin(\varphi_{21} + \alpha_{21})); \\ y_1(\varphi_{21}) &= A_1 (\sin \alpha_{21} + \xi_{21}^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21}\varphi_{21})) \cos \alpha_{21} - \sin(\varphi_{21} + \alpha_{21})); \\ \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1\omega_{21} (\exp(-\xi_{21}\varphi_{21}) \cos \alpha_{21} - \cos(\varphi_{21} + \alpha_{21})). \end{aligned} \quad (48)$$

Инвариантность амплитуды A_1 (9), входящей в частное решение (23) первого уравнения (28), и амплитуды A_1 (37), входящая в частное решение (31) приближенного уравнения переходного процесса (25), обеспечивает согласованность решений этих уравнений на границе переходного процесса и стационарного состояния МС2, а также инвариантность самих частных решений МС2 (23) и (31) этих уравнений.

Координаты и скорость ЦМ C МС2 в системе отсчета K можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}x_C &= (m_1 x_1 + m_2 x_2) / m; y_C = (m_1 y_1 + m_2 y_2) / m; \\ \dot{x}_C &= (m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2) / m; \dot{y}_C = (m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2) / m,\end{aligned}\quad (49)$$

где координаты $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$, $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} R \sin \varphi_{21}$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \omega_{21} R \cos \varphi_{21}$.

Результаты математического моделирования

Траектории движения s_1, s_2 и s_C опорного m_1 , рабочего m_2 тел и ЦМ C MC2 в системе отсчета K , рассчитанные по решениям (48) и формулам (49) для $m_1 = m_2 = 1$ кг, $R = 1$ м и $\dot{y}_2(0) = 1$ м/с приведены на рисунке 2, а и для $m_1 = 1000$ кг; $m_2 = 1$ кг, $R = 1$ м и $\dot{y}_2(0) = 1$ м/с – на рисунке 2, б.

Согласно решениям (48) и расчетам, показанным на рисунке 2, а, Движение MC2 можно рассматривать как сложное движение состоящее из ее движения относительно центра O ИД и ее переносного движения вместе с этим центром O . ИД формируется в момент времени $t = 0$, что согласуется с представлением о мгновенной передаче взаимодействий по стержню конечной длины R . Начальное положение центра $O(0)$ ИД показано на рисунке 2, а пунктиром. Текущие значения координат центра O ИД можно определить из решений (48) в виде:

$$\begin{aligned}x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \alpha_{21} - \xi_{21}^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21} \varphi_{21})) \sin \alpha_{21} \right); \\ y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \alpha_{21} + \xi_{21}^{-1} (1 - \exp(-\xi_{21} \varphi_{21})) \cos \alpha_{21} \right).\end{aligned}\quad (50)$$

Они в системе отсчета K при $\varphi_{21} = \omega_{21} t = 0$ составляют $x_O = A_1 \cos \alpha_{21} = 0,5$ м и $y_O = A_1 \sin \alpha_{21} = 0,5$ м (см. рис. 2, а), а для $\varphi_{21} = \omega_{21} t = \infty$ – $x_O = 0$ и $y_O = \sin \varepsilon = 1$ м.

Скорость $v_O = \sqrt{\dot{x}^2(\varphi_{21}) + \dot{y}^2(\varphi_{21})}$ центра O ИД может быть определена дифференцированием (50) по времени t .

В таблице 1 приведены начальная кинетическая энергия $T(0)$ MC2 и ее кинетическая энергия $T(t \geq \Delta t)$ в стационарном состоянии для двух соотношений ее масс m_1 и m_2 , рассчитанная с учетом теоремы Кенига [3]

Расчет производился по формулам:

$$T(0) = m_2 v_2(0) / 2; \quad (51)$$

$$T(t \geq \Delta t) = m v_{CO}^2 / 2 + m_1 v_{1C}^2 / 2 + m_2 v_{2C}^2 / 2 = m v_{CO}^2 / 2 + m_1 v_{12}^2 / 2 + m_2 v_{21}^2 / 2, \quad (52)$$

где $v_C = \omega_{CO} r_{CO}$ – скорость ЦМ C MC2 в ее стационарном состоянии в системе отсчета K_O и скорости $v_{1C} = \omega_C r_{1C}$, $v_{2C} = \omega_C r_{2C}$ ее тел m_1 и m_2 в системе отсчета K_C ;

$$r_{CO} = m_2 \sqrt{A_1^2 + A_2^2} / m = x_C(0) = \text{const} \quad (53)$$

– радиус стационарного переносно-поступательного движения ЦМ C MC2 в системе отсчета K_O (см. рис. 2, а).

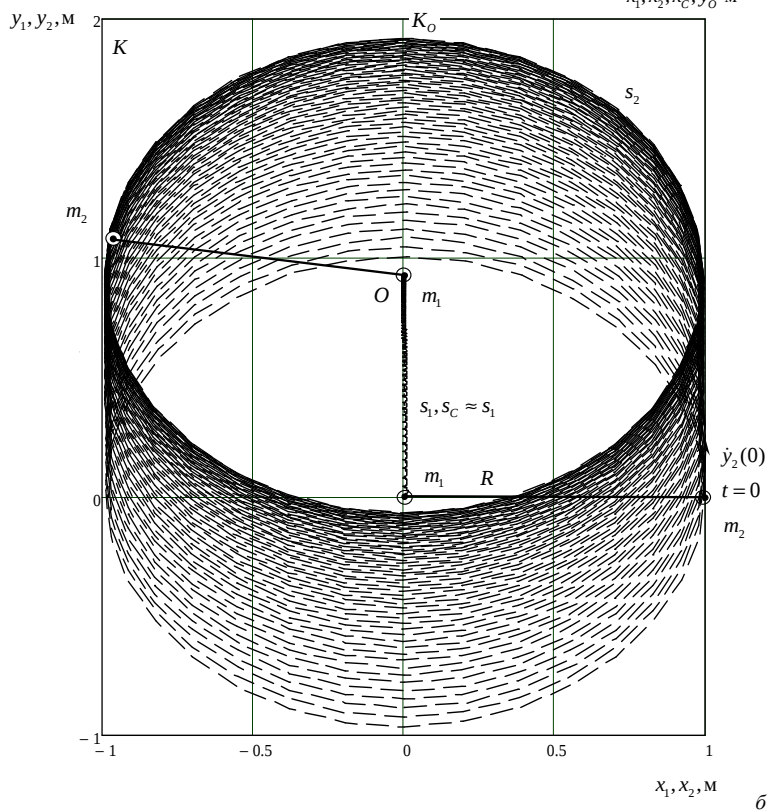
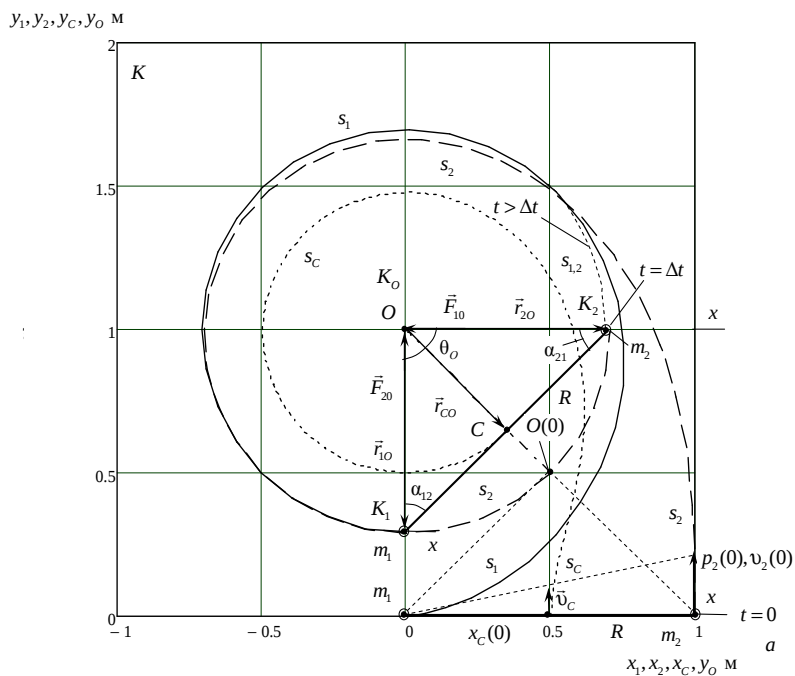


Рис. 2. Траектории движения s_1, s_2 и s_C опорного m_1 , рабочего m_2 тел и ЦМ C
 МС2: для $m_1 = m_2 = 1$ кг, $R = 1$ м и $\dot{y}_2(0) = 1$ м/с – а; и для
 $m_1 = 1000$ кг; $m_2 = 1$ кг, $R = 1$ м и $\dot{y}_2(0) = 1$ м/с – б

Табл. 1. Кинетическая энергия

$v(0)$, м/с	m_1 , кг	m_2 , кг	$T(0)$, Дж	$T(t \geq \Delta t)$, Дж	θ_0 , град	α_{12}, α_{21} , град
1	1	1	0,5	0,5	90	$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 45$
1	1000	1	0,5	0,5	90	$\alpha_{12} = 89,943; \alpha_{21} \approx 0$

Согласно таблице 1 для начальных импульсов $\vec{p}_1(0) = 0$ и $p_2(0) = m_2 \dot{y}_2(0)$ требование к сохранению кинетической энергии $T(t \geq \Delta t) - T(0) = 0$ выполняется в двух случаях: когда $m_1 = m_2$, а также при $m_1 \rightarrow \infty$ и $m_2 \neq 0$. Расчет траекторий движения МС2 при $m_1 \rightarrow \infty$ и $m_2 \neq 0$ показан на рис. 2, б.

Для принятой приближенной математической модели переходного процесса МС2 требование сохранения кинетической энергии $T(t < \Delta t) - T(0) = 0$ при $t < \Delta t$ выполняется только приближенно $T(t < \Delta t) - T(0) \approx 0$. Это обусловлено тем, что при построении модели переходного процесса принято допущение (30)

$$\omega_{CO} = \omega_{21} = \frac{p_2(0)}{m_2 R} = \text{const} . \quad (54)$$

при котором, согласно рисунку 2, а, требование $r_{CO} = x_C(0) = \frac{m_2 R}{m}$ (30), выполняющееся для стационарного состояния МС2, для ее переходного процесса выполняется только приближенно $x_C(t < \Delta t) \approx \frac{m_2 R}{m}$.

Время перехода МС2 в стационарное состояние при $m_1 = m_2 = 1$ кг и $v_2(0) = 1$ м/с (для рис. 2, а) составляет

$$t = \Delta\varphi_{21} / \omega_{21} = \Delta\varphi_{21} / \omega_{CO} = 7,069 \text{ с} , \quad (55)$$

а при $m_1 = 1000$ кг; $m_2 = 1$ кг и $v_2(0) = 1$ м/с (для рис. 2, б) –

$$t = \Delta\varphi_{21} / \omega_{21} = \Delta\varphi_{21} / \omega_C = 392,306 \text{ с} , \quad (56)$$

где $\Delta\varphi_{21}$ – суммарный угол поворота тела m_2 в системе отсчета K_1 к моменту перехода МС2 в стационарное состояние, где $y_O(\varphi_{21}) = \text{const}$.

Заключение

Основным результатом работы является расширение представлений о динамике механических систем:

– для радиального распределения $\theta_0 = \pi / 2$, (1) масс тел замкнутой МС2 с числом степеней свободы $N = 5$ импульс ее ЦМ S изменяется по периодическому закону, так что его циркуляция по замкнутому контуру равна нулю;

– скорость передачи импульса между взаимодействующими телами при мгновенной передаче взаимодействия по связи конечной длины R зависит от соотношения масс этих тел.

Список литературы

1. Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в поле относительных сил инерции ее взаимодействующих тел // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2025. – №46 – С. 16-33. – doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-16-33.
2. Савелькаев С. В. Динамический анализ многомассовых механических систем в поле относительных сил инерции: препринт. – Новосибирск: Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 2025. – 66 с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
4. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. – М.: Наука, 1991. – Т. 1. – 496 с.
5. Савелькаев С. В. Динамическая гравитация как эквивалент инерции в механике и единица ее измерения // Вестник Сибирского государственного университета геосистем и технологий. – 2025. – Т. 30, №1. – С. 169-185. – doi.org/10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185.
6. Савелькаев С. В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2024. – №87. – С. 135-149. – doi.org/10.17223/19988621/87/11.

References

1. Savelkaev S. V. Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in the field of relative inertial forces of its interacting bodies // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2025, iss. 46, pp. 1633. doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-16-33
2. Savelkaev S.V. Dynamic analysis of multimass mechanical systems in the field of relative inertial forces: preprint. – Novosibirsk, Siberian State University of Geosystems and Technologies, 2025. – 66 p.
3. Nikitin N. N. Course in theoretical mechanics. – M.: Higher school, 1990. – 607 p.
4. Saveliev I.V. Fundamentals of theoretical physics. Mechanics and electrodynamics. – M.: Science, 1991. – Vol. 1. – 496 p.
5. Savelkaev S. V. Dynamic gravity as an equivalent of inertia in mechanics and a unit of its measurement // Bulletin of the Siberian State University of Geosystems and Technology. 2025. vol, 30. no. 1, pp. 169-185. doi.org/10.33764/2411-1759-2025-30-1-169-185
6. Savelkaev S.V. Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium taking into account inertial forces // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. 2024, no. 87, pp. 135-149. dio.org/10.17223/19988621/87/11.

Савелькаев Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии	Savel'kaev Sergey Viktorovich – doctor of technical sciences, associate professor, professor of the Department of special devices, innovations and metrology
sergei.savelkaev@yandex.ru	

Received 09.11.2025