

ВЫБОР ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ МЕТОДОМ ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ НА ПРИМЕРЕ УСТАНОВКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ В ПРИЗМЕ

Пипкин Ю.В.

Донбасский государственный технический университет, Алчевск, Россия

Ключевые слова: эквивалентная система сил, метод виртуальных перемещений, виртуальная работа, нормальная реакция, равновесие заготовки, станочное приспособление, цилиндрическая заготовка, установочная призма.

Аннотация. Рассматривается проблема обоснования расчетных зависимостей силового расчета станочных приспособлений для случая прижима заготовки цилиндрической поверхностью к плоскостям в форме V-образной установочной призмы. Поставлена задача выбора эквивалентной системы сил для определения величины нормальной реакции опоры, необходимой для обеспечения равновесия заготовки силами трения. Выявлено существование трех различных эквивалентных систем сил. Установлено, что величина нормальной реакции в опорах для разных эквивалентных систем сил различается в 2 раза. Обоснование выбора эквивалентной системы сил выполнено на основе принципа виртуальных перемещений. Показано, что работа силы нормального давления на разных виртуальных перемещениях равна между собой. Предложен критерий выбора эквивалентной системы сил в виде равенства работы силы нормального давления половине работы активной силы на собственных виртуальных перемещениях. На основе предложенного критерия подтверждена расчетная формула.

SELECTING AN EQUIVALENT SYSTEM OF FORCES BY THE VIRTUAL WORKS METHOD USING THE EXAMPLE OF INSTALLING A CYLINDRICAL BLANK IN A MOUNTING V-BLOCK

Pipkin Yu.V.

Donbass State Technical University, Alchevsk, Russia

Keywords: equivalent system of forces, virtual displacement method, virtual work, normal reaction, workholding fixture, cylindrical workpiece, mounting V-block.

Abstract. This article examines the substantiation of the calculated dependencies for the force calculation of workholding fixtures for the case of a workpiece pressed by a cylindrical surface against planes in the form of a V-shaped mounting prism. The task of selecting an equivalent system of forces is posed for determining the magnitude of the normal reaction of the support required to ensure the equilibrium of the workpiece by frictional forces. The existence of three different equivalent systems of forces is revealed. It is established that the magnitude of the normal reaction at the supports for different equivalent systems of forces differs by a factor of 2. The justification for the choice of the equivalent system of forces is based on the principle of virtual displacements. It is shown that the work of the normal pressure force on different virtual displacements is equal to each other. A criterion for selecting an equivalent system of forces is proposed in the form of equality of the work of the normal pressure force to half the work of the active force on own virtual displacements. Based on the proposed criterion, the calculation formula is validated.

Введение. Установка заготовки цилиндрической детали с приложением силы закрепления применяется при механической обработке для обеспечения неподвижности под действием силы резания и заключается в прижиге детали

к V-образной установочной призме (рис. 1). Величина необходимой силы прижима рассчитывается исходя из равновесия заготовки. При этом смещению заготовки в виде сдвига вдоль контактной поверхности без разрыва контакта заготовки с призмой противодействуют силы трения, которые в свою очередь зависят от величины нормальной реакции призмы в точке контакта заготовки с опорой.

Таким образом, расчет величины нормальной реакции является важной практической задачей. Нужно отметить, что применение готовых формул рекомендуется в учебной литературе по проектированию станочных приспособлений зачастую без их обоснования и вывода, что с одной стороны предполагает достаточный уровень подготовки по обеспечивающим дисциплинам, однако с другой стороны наличие такого обоснования только усилит и закрепит практические навыки по применению общетеоретических принципов механики.

Целью настоящей статьи является подробное рассмотрение элементов методики получения расчетных формул на основе принципа виртуальных перемещений, который для силовых расчетов станочных приспособлений ранее не применялся. В то же время рассмотрение возможных смещений заготовки в процессе механической обработки составляет основу инженерного подхода к проектированию конструкций, особенно в отношении точностных расчетов.

Постановка задачи

На рисунке 1 по [1] заготовка устанавливается в опорной призме по цилиндрической базовой поверхности и прижимается сверху силой Q к контактным плоскостям призмы, расположенных друг относительно друга под углом α . Причинами смещения заготовки в виде сдвига относительно контактных плоскостей без разрыва контакта рассматривают момент резания M_p , направленный по часовой стрелке вокруг центра окружности с радиусом r , и силу резания P_p , направленную вдоль оси заготовки.

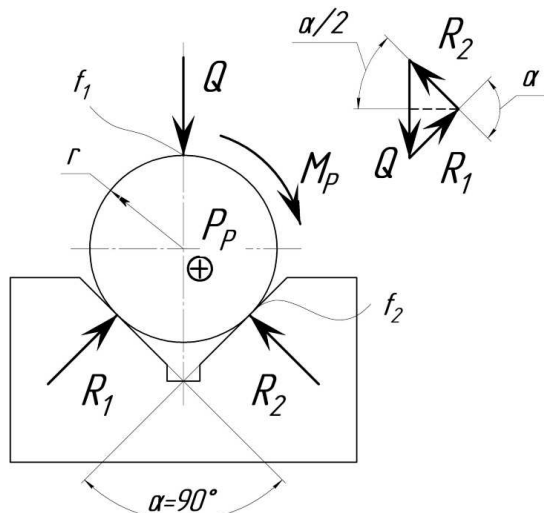


Рис. 1. Схема установки цилиндрической заготовки в призме

Для определения реакции опоры R_1 и R_2 в [1] предлагается на основе силового треугольника (рис. 1) использовать формулу

$$R_1 = R_2 = \frac{Q}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (1)$$

$$R_1 = R_2 = \frac{Q}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (2)$$

На рисунке 2 представлена объединенная расчетная схема для трех систем сил, эквивалентных действующей зажимной силе Q .

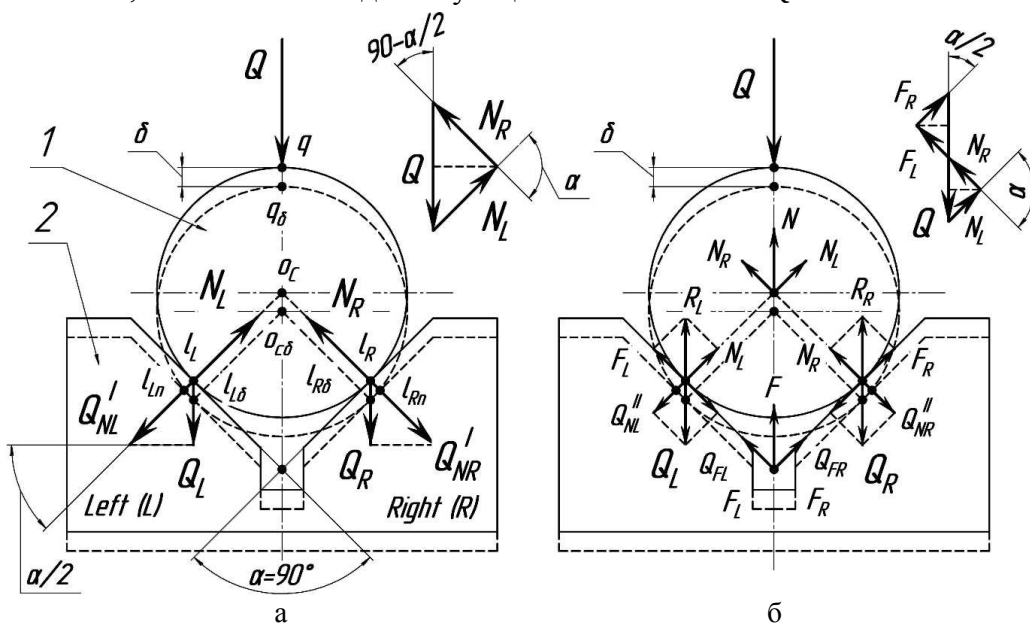


Рис. 2. Системы сил, эквивалентные силе зажима, и виртуальные перемещения точек системы «заготовка – призма»: а) случай равновесия системы на нормальных давлениях; б) случай равновесия системы на ортогональных проекциях

Q_{NR}^I соответствуют реактивные силы N_L и N_R , действующие со стороны призмы на заготовку и уравнивающие активную силу Q .

Первая эквивалентная система сил соответствует формуле (1), но её особенностью является то, что для обратной ей системы нормальных реакций N_L и N_R при любых углах α будет иметь место соотношение,

$$N_L \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = N_R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Q}{2}, \quad (3)$$

при этом величина $Q/2$ соответствует векторам Q_L и Q_R (рис. 2, а), представляющих собой проекцию векторов Q_{NL}^I и Q_{NR}^I на направление активной силы Q .

Это обстоятельство приводит нас ко второй эквивалентной системе сил, в которую входят силы Q_L и Q_R (рис. 2, б).

Вторая эквивалентная система сил включает в себя две силы Q_L и Q_R (рис. 2, б), параллельные активной силе Q . Получаются эти силы из рассмотрения заготовки как балки, опертой на двух опорах и нагруженной по центру активной силой. По величине они будут составлять половину активной силы, т.е. $Q/2$. Их приведение к равнодействующей, как известно, будет представлять параллельный перенос на линию действия активной силы с добавлением моментов, которые в силу симметричности призмы будут равны и взаимно уравновешены. Для определения нормальных реакций естественным будет разложение сил Q_L и Q_R на нормальные (Q_{NL}^{II} и Q_{NR}^{II}) и тангенциальные (Q_{FL} и Q_{FR}) составляющие, которые в совокупности дадут третью эквивалентную систему сил.

Третья эквивалентная система сил таким образом включает в себя пары ортогональных составляющих сил Q_L и Q_R – (Q_{NL}^{II} ; Q_{FL}) и (Q_{NR}^{II} ; Q_{FR}). Приведение этих сил к равнодействующей выполняется отдельно для нормальных (Q_{NL}^{II} и Q_{NR}^{II}) и касательных (Q_{FL} и Q_{FR}) составляющих на том основании, что линии действия этих составляющих пересекаются в точках, лежащих на линии действия силы Q . Также как и силы Q_L и Q_R , составляющие Q_{NL}^{II} , Q_{FL} , Q_{NR}^{II} , Q_{FR} можно отнести к активным, для которых со стороны призмы возникают реактивные силы, соответственно N_L , N_R , F_L , F_R . На рисунке 2, б показаны параллелограммы приведения реактивных сил к силе N для нормальных составляющих и к силе F для тангенциальных составляющих. Силы N и F в сумме уравнивают силу Q . При этом в отличие от первой эквивалентной системы, для которой характерно соотношение (3), для третьей эквивалентной системы имеет место соотношение

$$N_L \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + F_L \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = N_R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + F_R \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Q}{2}. \quad (4)$$

Как видим выражения (3) и (4) отличаются тем, что величина силы нормального давления из (3) может быть определена непосредственно (и выражена формулой (1)), а из (4) – нет. Для получения равенства (4) в него необходимо поставить значения сил N_L , N_R , F_L , F_R как составляющих сил R_L и R_R , реактивных к силам $Q_L = Q_R = Q/2$, по следующим соотношениям

$$N_L = N_R = \frac{Q}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5)$$

и
$$F_L = F_R = \frac{Q}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (4), получим равенство.

Можно заметить принципиальную разницу между формулами (1) и (5) для силы нормального давления, отличие между которыми составляет $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ раз, что при угле α равном 90 градусов будет равно 0,5, т.е. величина нормальной реакции, полученная для первой эквивалентной системы сил, в 2 раза больше, чем для третьей эквивалентной системы сил. Эта разница может вносить неопределенность в расчеты, по существу, в 2 раза занижая возникающие силы трения при третьей эквивалентной системе.

Следует отметить, что в большинстве литературных источников для расчетов принимается первая эквивалентная система сил, дающая большую величину силы нормального давления (и соответственно большую величину реактивной силы).

Однако ввиду существования третьей эквивалентной системы сил требуется сформулировать критерий выбора между первой и третьей системами.

Исходя из принципа виртуальных перемещений, определим работу сил, входящих в первую и третью эквивалентные системы, на некотором виртуальном перемещении δ (рис. 2, а, б), происходящем под действием зажимной силы Q . Перемещение δ рассматриваем как виртуальное в связи с тем, что оно происходит со всеми элементами механической системы (условно смещается как заготовка, так и опорная призма, т.е. связи внутри системы не разрываются), элементы при этом считаем безмассовыми, а связи накладываемые на всю систему в целом предполагаем такими, что они допускают перемещение в направлении действия активной силы.

Работа силы Q на виртуальном перемещении δ определится по формуле:

$$A_Q = Q \cdot \delta. \quad (7)$$

Для первой эквивалентной системы работа сил нормального давления Q_{NL}^I и Q_{NR}^I на виртуальном перемещении δ определится по формулам

$$A_{QIL} = Q_{NL}^I \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \delta, \quad (8)$$

$$A_{QIR} = Q_{NR}^I \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \delta. \quad (9)$$

Таким образом, заметим, что сумма виртуальных работ сил эквивалентной системы равна работе активной силы Q . Принцип виртуальных перемещений для первой эквивалентной системы выполняется, так как работа реактивных сил N_L и N_R будет такой же, как у Q_{NL}^I и Q_{NR}^I , но с обратным знаком, и в сумме с работой активной силы даст «0».

Для третьей эквивалентной системы работа сил Q_{NL}^{II} , Q_{FL} , Q_{NR}^{II} , Q_{FR} определится по формулам

$$A_{Q_{IINL}} = Q_{NL}^{II} \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta, \quad (10)$$

$$A_{Q_{IINR}} = Q_{NR}^{II} \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta, \quad (11)$$

$$A_{Q_{IFL}} = F_{FL} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta, \quad (12)$$

$$A_{Q_{IFR}} = F_{FR} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \frac{Q}{2} \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta. \quad (13)$$

Сложив полученные выражения, видим, что сумма виртуальных работ сил эквивалентной системы равна работе активной силы Q . Таким образом принцип виртуальных перемещений для третьей эквивалентной системы также выполняется.

Обращает на себя внимание общее для обеих (первой и третьей) систем выражение в формулах (8)-(11)

$$\cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta. \quad (14)$$

Рассматривая треугольник точек $\Delta(l_L l_{L\delta} l_{Ln})$, можно отметить, что он прямоугольный, отрезок $(l_L; l_{L\delta}) = \delta$, угол $\angle(l_L l_{L\delta} l_{Ln}) = \frac{\alpha}{2}$. Соотношение (14) соответствует катету $(l_L; l_{Ln})$, который представляет собой кратчайшее расстояние между двумя положениями контактной плоскости призмы, которую можно понимать по [3] как поверхность взаимодействия, а также рассматривать как виртуальное перемещение системы по направлению силы нормального давления.

Работа силы Q_{NL}^I нормального давления первой эквивалентной системы на отрезке $(l_L; l_{L\delta})$ определится по формуле

$$A_{(l_L; l_{L\delta})}^I = Q_{NL}^I \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot (l_L; l_{L\delta}) = \frac{Q}{2} \cdot (l_L; l_{L\delta}), \quad (15)$$

а на отрезке $(l_L; l_{Ln})$ по формуле

$$A_{(l_L; l_{Ln})}^I = Q_{NL}^I \cdot (l_L; l_{Ln}) = \frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot (l_L; l_{Ln}) = \frac{Q}{2} \cdot (l_L; l_{L\delta}). \quad (16)$$

Таким образом, для первой эквивалентной системы работа силы нормального давления на отрезках $(l_L; l_{L\delta})$ и $(l_L; l_{Ln})$ равны между собой и равны работе активной силы Q_L ($Q_L = Q/2$) на виртуальном перемещении $(l_L; l_{L\delta})$ по направлению её действия.

Работа сил Q_{NL}^H нормального давления третьей эквивалентной системы на отрезке $(l_L; l_{L\delta})$ определится по формуле

$$A_{(l_L; l_{L\delta})}^H = Q_{NL}^H \cdot \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot (l_L; l_{L\delta}) = \frac{Q}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (l_L; l_{L\delta}), \quad (17)$$

а на отрезке $(l_L; l_{Ln})$ по формуле

$$A_{(l_L; l_{Ln})}^H = Q_{NL}^H \cdot (l_L; l_{Ln}) = \frac{Q}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (l_L; l_{L\delta}) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{Q}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (l_L; l_{L\delta}). \quad (18)$$

Таким образом для третьей эквивалентной системы работа силы нормального давления на отрезках $(l_L; l_{L\delta})$ и $(l_L; l_{Ln})$ равны между собой, но *не равны* работе активной силы Q_L на виртуальном перемещении $(l_L; l_{L\delta})$ по направлению её действия. Это связано с тем, что в третьей эквивалентной системе сил часть работы выполняется тангенциальными составляющими Q_{FL} и Q_{FR} , причем их работа на отрезке $(l_L; l_{Ln})$ равна 0 ввиду перпендикулярности этому отрезку.

Таким образом в пользу выбора первой эквивалентной системы сил говорит то обстоятельство, что работа силы нормального давления на виртуальном перемещении поверхности взаимодействия, определяемом для плоскости кратчайшим расстоянием по нормали, равна половине работы активной силы на виртуальном перемещении точки её приложения. Этот критерий можно выразить формулой

$$A_N = \frac{A_Q}{2}, \quad (19)$$

где A_N – работа силы Q_N нормального давления на виртуальном перемещении поверхности взаимодействия, отсчитываемого для плоскости по нормали (т.е. совпадающего с направлением Q_N); A_Q – работа активной силы Q на виртуальном перемещении точки её приложения, определяемом как отрезок, точки которого получены при пересечении линии действия активной силы Q двух положений поверхности взаимодействия.

Раскрыв выражение (19) для работ, получаем

$$Q_{NL(R)} \cdot (l_L; l_{Ln}) = \frac{1}{2} Q \cdot (l_L; l_{L\delta}) = Q_{L(R)} \cdot (l_L; l_{L\delta}), \quad (20)$$

где $Q_{NL(R)} = Q_{NL} = Q_{NR}$ – силы нормального давления в контакте заготовки с плоскостью призмы; $Q_{L(R)} = Q_L = Q_R$ – силы, совпадающие с направлением активной силы Q , параллельные ей, равные по модулю $Q/2$.

Преобразовав (20), получаем соотношение

$$\frac{Q_{NL(R)}}{Q_{L(R)}} = \frac{(l_L; l_{L\delta})}{(l_L; l_{Ln})}, \quad (21)$$

которое соответствует «золотому правилу» механики, где «выигрывая» в перемещении $(l_L; l_{L\delta})$ «проигрываем» в силе $Q_{L(R)}$ и наоборот «проигрывая» в перемещении $(l_L; l_{Ln})$ «выигрываем» в силе $Q_{NL(R)}$.

Также из выражения (20) можно вывести формулу для силы нормального давления

$$Q_N = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{(l_L; l_{L\delta})}{(l_L; l_{Ln})} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (22)$$

которая по виду совпадает с формулой (1) и однозначно указывает на необходимость применения первой эквивалентной системы сил.

Заключение

1. Для случая установки цилиндрической заготовки в V-образную установочную призму выявлены три системы сил, эквивалентные активной зажимной силе.

2. На основе принципа виртуальных перемещений предложен критерий выбора эквивалентной системы сил, заключающийся в равенстве виртуальных работ силы нормального давления и активной силы на собственных направлениях. Таким образом, предполагается, что величина силы нормального давления со стороны заготовки на призму формируется в соответствии с «золотым правилом» механики.

3. Показано, что величина работы силы нормального давления (и соответствующей ей нормальной реакции) на двух разных виртуальных перемещениях равны. При этом отрезки перемещения получаются пересечением направления перемещения с двумя положениями поверхности взаимодействия, т.е. контактной плоскости призмы.

4. В соответствии с предложенным критерием получен вывод о необходимости применения первой эквивалентной системы сил (дающих наибольшую по величине силу нормального давления).

Представленные результаты рекомендуются для проектировщиков станочных приспособлений в части силового расчета при установке цилиндрической заготовки в призмы. Также приведенные выкладки

представляют интерес для углубленного изучения дисциплин, связанных с проектированием технологической оснастки в области механической обработки деталей.

Список литературы

1. Горохов В.А. Проектирование и расчет приспособлений: Учебное пособие. – Минск: Выш. шк., 1986. – 238 с.
2. Берберов С.А., Тамаркин М.А., Прокопец Г.А., Лебедев В.А. Технологическая оснастка: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2025. – 271 с. – DOI: 10.12737/1037188.
3. Карпов Г.Н. Механические связи и их реакции: учебное. – М.: Директ-Медиа, 2020. – 27 с.

Referances

1. Gorokhov V.A. Design and calculation of devices: Textbook for students of higher education institutions specializing in mechanical engineering. – Minsk: Higher school, 1986. – 238 p.
2. Berberov S.A., Tamarkin M.A., Prokopets G.A., Lebedev V.A. Technological equipment: a textbook. – M.: INFRA-M, 2025. – 271 p. – DOI: 10.12737/1037188.
3. Karpov G.N. Mechanical links and their reactions: a textbook for bachelors in all technical areas. – M.: Direct-Media, 2020. – 27 p.

Пипкин Юрий Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Технология и организация машиностроительного производства»	Pipkin Yury Vladimirovich – candidate of technical science, assistant professor of the Department of technologies and organizations of mechanical engineering production
tmsi_pipkin@mail.ru	

Received 29.10.2025