

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-50-24-28>

ВЛИЯНИЕ УЧЕТА УДЛИНЕНИЯ СТЕРЖНЯ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Зенкина И.А., Зенкин В.Н., Зенкина П.Н.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Ключевые слова: момент инерции тела, крутильные колебания, дифференциальные уравнения, период колебаний, коэффициент жесткости, средняя квадратическая ошибка.

Аннотация. Рассмотрен метод определения момента инерции тела произвольной формы с помощью крутильных колебаний. Получена формула для вычисления момента инерции тела с помощью эталонного тела. Проведено уточнение методики посредством учета изменения длины и диаметра стержня в результате подвеса к нему тела. Получена уточненная расчетная формула, произведена оценка средней квадратической ошибки.

THE EFFECT OF ACCOUNTING FOR ROD ELONGATION ON DETERMINING THE MOMENT OF INERTIA OF A BODY BY THE TORSIONAL OSCILLATION METHOD

Zenkina I.A., Zenkin V.N., Zenkina P.N.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: moment of inertia of a body, torsional vibrations, differential equations, oscillation period, stiffness coefficient, mean square error.

Abstract. A method for determining the moment of inertia of a body of arbitrary shape using torsional vibrations is considered. A formula for calculating the moment of inertia of a body using a reference body is obtained. The methodology was refined by taking into account changes in the length and diameter of the rod as a result of suspension of the body to it. A refined calculation formula has been obtained, and an estimate of the average square error has been made.

Определение моментов инерции тел является важной технической задачей, так как данная характеристика является ключевой при составлении дифференциальных уравнений вращательного движения [1-3]. Если тело имеет произвольную неправильную или сложную форму, аналитическое определение момента инерции становится невозможным и данная характеристика находится в результате проведения эксперимента [4, 5].

Метод определения момента инерции тела с помощью крутильных колебаний может быть использован для тел различной массы и формы [6]. Упругий стержень своим верхним концом жестко закрепляется в удерживающем устройстве. К нижнему концу стержня при помощи зажимного устройства прикрепляется исследуемое тело. Ось стержня должна быть главной центральной осью инерции всей конструкции для того, чтобы исключить боковые колебания системы. Методика определения моменты инерции состоит в том, что стержень с исследуемым телом поворачивают вокруг оси стержня на некоторый угол и опускают без начальной угловой

скорости. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, и тогда дифференциальное уравнение движения системы будет записано следующим образом:

$$(J_m + J_{кр} + J_c)\ddot{\varphi} + M = 0,$$

где φ – угол поворота стержня, J_m – момент инерции исследуемого тела, $J_{кр}$ – момент инерции устройства, удерживающего тело, J_c – момент инерции стержня, M – момент упругости стержня. При проведении эксперимента, как правило используется стержень малого диаметра, поэтому его моментом инерции можно пренебречь.

Если угол поворота стержня мал, то момент упругости стержня можно считать пропорциональным первой степени угла: $M = c\varphi$, где c – коэффициент жесткости стержня. Таким образом, дифференциальное уравнение движения системы примет вид:

$$(J_m + J_{кр})\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

Решим уравнение с учетом начальных условий: φ_0 , $\dot{\varphi}_0 = 0$. Получим закон изменения угла поворота:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{c}{J_m + J_{кр}}}$ – частота колебаний системы.

Так как период крутильных колебаний T груза может быть найден через частоту колебаний как

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_m + J_{кр}}{c}},$$

то момент инерции тела будет определяться следующим образом:

$$J_m = \frac{c}{4\pi^2} T^2 - J_{кр}.$$

Таким образом, для определения момента инерции тела необходимо измерить период крутильных колебаний системы. Также необходимо знать коэффициент жесткости подвеса-стержня, который можно определить как

$$c = \frac{GJ_p}{l},$$

где G – модуль сдвига материала стержня, $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции стержня, а d и l – соответственно диаметр и длина стержня-подвеса. Момент крепления $J_{кр}$ должен быть определен предварительно или $J_{кр} = 0$, если тело закреплено непосредственно на стержне.

При проведении эксперимента, как правило, опыт проводят сначала для эталона, который имеет примерно ту же массу, что и исследуемое тело, но с

известным моментом инерции J_0 , а затем уже для тела, измерение момента инерции которого надо произвести.

Тогда для эталона момент инерции выражается через период колебаний:

$J_0 = \frac{c}{4\pi^2} T_0^2$, а для тела: $J = \frac{c}{4\pi^2} T^2$. Откуда момент инерции тела находится из следующей формулы:

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2}.$$

Проблема данного метода состоит в том, что при проведении эксперимента стержень-подвес удлинится в зависимости от массы исследуемого тела, а также изменится его диаметр. Учтем данные изменения. Для недеформированного стержня длиной l_0 и диаметром d_0 коэффициент жесткости c_0 равен:

$$c_0 = \frac{G\pi d_0^4}{32l_0}.$$

После крепления к стержню-подвесу тела массой m его длина l и диаметр d будут соответственно равны

$$l = l_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right), \quad d = d_0 \left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right),$$

где $\sigma = \frac{4mg}{\pi d_0^2}$ – нормальное напряжение, μ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Таким образом, коэффициент жесткости стержня при креплении к нему тела будет равен:

$$c = c_0 \frac{\left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right)^4}{1 + \frac{\sigma}{E}}.$$

Не теряя точности, можно воспользоваться следующими приближениями:

$$\left(1 - \mu \frac{\sigma}{E} \right)^4 \approx 1 - 4\mu \frac{\sigma}{E}, \quad \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{E}} \approx 1 - \frac{\sigma}{E}.$$

Тогда коэффициент жесткости подвеса при нагружении его телом может быть записан следующим образом:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\sigma}{E} (1 + 4\mu) \right).$$

С учетом полученного выражения для коэффициента жесткости стержня момент инерции эталона запишется как:

$$J_{\sigma} = \frac{c_0}{4\pi^2} T_{\sigma}^2 \left(1 - \frac{\sigma_{\sigma}}{E} (1 + 4\mu) \right).$$

Для исследуемого тела момент инерции соответственно равен:

$$J = \frac{c_0}{4\pi^2} T^2 \left(1 - \frac{\sigma}{E} (1 + 4\mu) \right).$$

Разделив последнее равенство на предыдущее, получим формулу для вычисления момента инерции тела:

$$J = J_{\sigma} \frac{T^2}{T_{\sigma}^2} \gamma.$$

Здесь γ обозначен коэффициент, учитывающий изменение крутильной жесткости стержня вследствие его деформации из-за подвешенного тела:

$$\gamma = \frac{1 - \frac{\sigma}{E} (1 + 4\mu)}{1 - \frac{\sigma_{\sigma}}{E} (1 + 4\mu)} \approx 1 + \frac{1 + 4\mu}{E} (\sigma_{\sigma} - \sigma).$$

Относительная ошибка, которую можно допустить при пренебрежении деформацией стержня составляет

$$\delta J \approx \frac{1 + 4\mu}{E} (\sigma_{\sigma} - \sigma).$$

Средняя квадратическая ошибка при определении момента инерции тела методом крутильных колебаний складывается из ошибок, обусловленных неточностью измерения периодов колебаний эталона δT_{σ} , тела δT , момента инерции эталона δJ_{σ} и ошибки в вычислении коэффициента $\delta \gamma$ и составляет:

$$\delta J \approx \sqrt{(\delta J_{\sigma})^2 + 4(\delta T)^2 + 4(\delta T_{\sigma})^2 + (\delta \gamma)^2}.$$

Список литературы

1. Зенкина И.А. Вывод дифференциального уравнения, определяющего закон изменения давления в активной зоне плоского газодинамического подшипника со спиральными канавками // Электронный журнал: наука, техника и образование. – 2016. – №2(6). – С. 8-15.
2. Емельянов А.В., Емельянов И.А., Зенкина И.А. Анализ физических процессов, протекающих в смазочных слоях газодинамических подшипников // Инженерный вестник Дона. – 2017. – №4. – URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4458.
3. Зенкина И.А., Зенкин В.Н. Определение осевого момента инерции тела методом качения по наклонной плоскости // Электронный журнал: наука, техника и образование. – 2024. – №1(46) – С. 21-27.
4. Зенкина И.А., Зенкин В.Н. Математическое обоснование метода определения момента инерции тела с помощью двойного математического маятника // Электронный журнал: наука, техника и образование. – 2025. – №2(52). – С. 18-23.
5. Гернет М.М., Ратобильский В.Ф. Определение моментов инерции. – М.: Машиностроение, 1969. – 247 с.

References

1. Zenkina I.A. Output of differential equation determining the law of pressure change in the core of flat gas-dynamic bearing with spiral grooves // Electronic journal: science technology and education. 2016, no. 2(6), pp. 8-15.
2. Emel'janov A.V., Emel'janov I.A., Zenkina I.A. Analysis of physical processes in lubricating layers of gas-dynamic bearings // Engineering Bulletin of the Don. 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4458.
3. Zenkina I.A., Zenkikn V.N. Determination of the axial moment of inertia of a body by rolling on an inclined plane // Electronic journal: science, technology and education. 2024, no. 1(46), pp. 21-27.
4. Zenkina I.A., Zenkikn V.N. Mathematical substantiation of the method of determining the moment of inertia of a body using a double mathematical pendulum // Electronic journal: science, technology and education. 2024, no. 2(52), pp. 18-23.
5. Gernet M.M., Ratobylskii V.F. Determination of moments of inertia. – M.: Mechanical engineering, 1969. – 247 p.

Зенкина Ирина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой МК10 «Высшая математика и физика»	Zenkina Irina Aleksandrovna – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, head of the department of «Higher Mathematics and Physics»
Зенкин Вячеслав Николаевич – студент	Zenkin Vyacheslav Nikolaevich – student
Зенкина Полина Никитична – студент – студент	Zenkina Polina Nikitichna – student
nizenkin@yandex.ru	

Received 21.10.2025