

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-49-30-36>

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ПАРАМЕТРОВ ДВУХМАССНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск,
Россия*

Ключевые слова: вибрационная машина, резонанс, динамическое качество, две степени свободы, двухмассная система, амплитудно-частотная характеристика, ширина резонансного пика, параметрический синтез, структурная теория, вариационная задача.

Аннотация. Рассматривается проблемы динамического качества работы резонансных вибрационных технологических машин. Поставлена задача определения параметров расчетной схемы в виде механической колебательной системы, обеспечивающих максимальную ширину резонансного пика при условии постоянства частоты и амплитуды резонанса. В рамках структурной теории, основанной на сопоставлении механическим колебательным системам структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления, разработан графоаналитический метод, позволяющий улучшать динамическое качество колебаний рабочих органов резонансных вибрационных технологических машин, для которых критерием качества служит ширина резонансного пика. Для системы с двумя степенями свободы разработан подход определения связей, обеспечивающих постоянство частоты и амплитуды резонанса; поставлена вариационная задача условной оптимизации для определения параметров системы с максимальной шириной резонансного пика при условии, что система имеет заданную частоту амплитуду колебания.

GRAPHOANALYTICAL METHOD FOR SYNTHESIZING PARAMETERS OF A TWO-MASS RESONANT SYSTEM WITH A GIVEN AMPLITUDE- FREQUENCY RESPONSE

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: vibration machine, resonance, dynamic quality, two degrees of freedom, two-mass system, amplitude-frequency characteristic, resonant peak width, parametric synthesis, structural theory, variational problem.

Abstract. The problem of dynamic quality in resonant vibration technological machines is addressed. The task involves determining the parameters of a design scheme in the form of a mechanical oscillatory system that ensures the maximum width of the resonant peak under the condition of constant resonance frequency and amplitude. Within the framework of the structural theory, based on comparing mechanical oscillatory systems to block diagrams of dynamically equivalent automatic control systems, a grapho-analytical method has been developed. This method allows for improving the dynamic quality of the oscillations of the working organs of resonant vibration technological machines, where the quality criterion is the width of the resonant peak. For a system with two degrees of freedom, an approach for determining the relationships that ensure the constancy of the resonance frequency and amplitude has been developed; a variational problem of conditional optimization is posed to determine the system parameters with the maximum resonant peak width, given a specified oscillation frequency and amplitude.

Введение. В настоящее время при проектировании вибрационных технологических машин особое внимание уделяется качеству резонансных режимов, которое традиционно оценивается по ширине пиков амплитудно-частотных характеристик [1, 2]. Интерес к данному параметру обусловлен тем, что увеличение ширины резонансного пика способствует повышению устойчивости системы к разбросу параметров и возмущающим воздействиям, сокращая количество срывов с резонанса. Срыв с резонансного режима, проявляющийся в резком снижении амплитуды колебаний рабочего органа, является грубым нарушением технологических требований и приводит к снижению энергоэффективности процесса.

Традиционным способом расширения полосы пропускания (ширины пика) колебательной системы является увеличение диссипативных сил. Однако рост демпфирования, как правило, приводит не только к расширению пика, но и к значительному снижению резонансной амплитуды, что часто является недопустимым [3, 4]. Выходом из этой проблемной ситуации является разработка научно обоснованных методик настройки параметров системы (масс, жесткостей, демпфирования) для одновременного обеспечения требуемых амплитудно-частотных свойств.

Настоящая статья посвящена разработке методов определения параметров механической колебательной системы, которые, с одной стороны, обеспечивают заданные частоту и амплитуду резонанса, а с другой – максимизируют ширину резонансного пика, необходимую для высокого динамического качества работы вибрационной машины.

I. Основные положения. Постановка задачи. В качестве расчетной схемы резонансной вибрационной машины рассматривается механическая система с двумя степенями свободы (рис. 1).

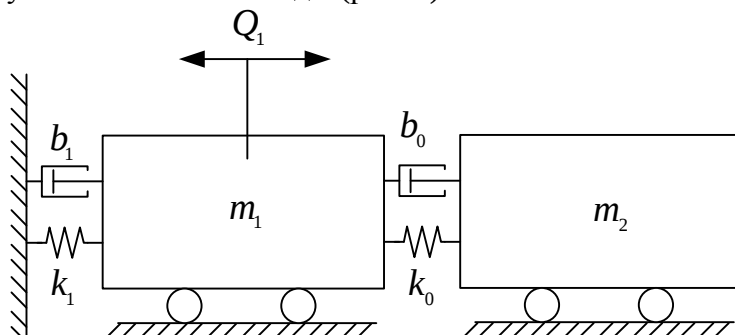


Рис. 1. Механическая колебательная система: m_1 , m_2 – сосредоточенные массы вибрационного возбудителя и рабочего органа; k_0 , k_1 – жесткости упругих элементов; b_0 , b_1 – коэффициенты вязкого трения; Q_1 – силовое моногармоническое возмущение от вибрационного возбудителя

Силовое возмущение Q_1 приложено к массе m_1 . Система совершает малые вынужденные колебания. Требования к динамическому качеству формулируются как условия на величины резонансной частоты $\omega_{\text{res}} = C_0$ и резонансной амплитуды $A(\omega_{\text{res}}) = C_1$ рабочего органа (масса m_2).

Задача заключается в определении таких параметров $m_1, m_2, k_0, k_1, b_0, b_1$, которые обеспечивают резонанс на заданной частоте C_0 с заданной амплитудой C_1 , а также обеспечивают максимально возможную ширину резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, что соответствует повышению устойчивости резонансного режима.

II. Математическая модель. Уравнения движения системы, составленные с использованием формализма Лагранжа II рода, имеют вид:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = q, \quad (1)$$

где M, B, K – матрицы вида:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 + b_0 & -b_0 \\ -b_0 & b_0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{pmatrix},$$

x и q – векторы вида:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование Лапласа к (1), получаем систему алгебраических уравнений в операторной форме:

$$(Mp^2 + Bp + K)X = Q, \quad (2)$$

где X и Q – изображения Лапласа функций x и q соответственно, $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$, ω – частота возмущения Q_1 .

Система уравнений (2) представляется в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2) [5-7].

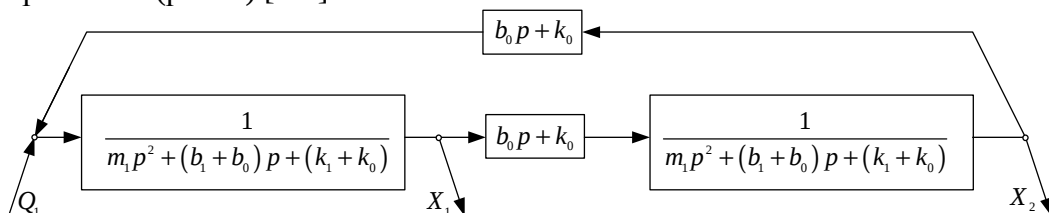


Рис. 2. Структурная схема, соответствующая механической колебательной системе, приведенной на рисунке 1

Динамика системы относительно координаты x_2 (рабочий орган) описывается передаточной функцией $W_2(p) = X_2(p)/Q_1(p)$. Амплитудно-частотная характеристика определяется как модуль передаточной функции:

$$A_2(\omega) = |W_2(p)|_{p=j\omega}. \quad (3)$$

Критерием динамического качества выбран радиус кривизны R резонансного пика амплитудно-частотной характеристики в точке локального максимума. Поскольку в точке резонанса первая производная $dA/d\omega = 0$, радиус кривизны вычисляется по упрощенной формуле:

$$R_2(\omega_{res}) = \frac{1}{|A_2'' \omega^2|}. \quad (4)$$

Таким образом, для расширения пика (увеличения R) необходимо минимизировать модуль второй производной амплитудно-частотной характеристики в точке резонанса.

Задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\left(A''_{\omega^2}(k_0, k_1, m_1, m_2, b_0, b_1) \right)^2 \Big|_{\omega=\omega_{res}} \rightarrow \min_{\substack{k_0, k_1, m_1, m_2, b_0, b_1 \\ \omega_{res} = C_0 \\ A(\omega_{res}) = C_1}}. \quad (5)$$

Учитывая сложность точного решения задачи (4) («сильная постановка»), вводится «слабая постановка». В ней резонансная частота ω_{res} приближенно заменяется «собственной» частотой ω_{sob} системы без трения ($b_0=b_1=0$), которая вычисляется аналитически. Целевой функционал при этом модифицируется для учета свойств амплитудно-частотной характеристики в окрестности резонанса:

$$\sqrt{\left(A''_{\omega^2} \right)^2 + \delta_0 \left(A'_{\omega} \right)^2} \Big|_{\omega=\omega_{sob}} \rightarrow \min_{\substack{k_0, k_1, m_1, m_2, b_0, b_1 \\ \omega_{res} = C_0 \\ A(\omega_{res}) = C_1}}. \quad (6)$$

где $\delta_0 > 0$ – весовой коэффициент.

Постановка задачи может быть названа слабой, так как позволяет найти не истинное решение исходной задачи, но близкое к решению в сильной постановке, рассматриваемое при малых силах трения.

III. Аналитическая структура связей. На основе метода структурных схем и анализа собственных колебаний системы без трения получены аналитические выражения для амплитудно-частотной характеристики. Показано, что условие постоянства собственной частоты $\omega_{sob} = C_0$ накладывает связь на параметры жесткости:

$$k_1 = \frac{C_0^2 k_0 (m_1 + m_2) - C_0^4 m_1 m_2}{k_0 - C_0^2 m_2}, \quad (7)$$

Аналитическая структура амплитудно-частотной характеристики имеет вид:

$$\begin{aligned} A_2^2(\omega) = & \left[h_{11} \left((\omega_{02}^2 - \omega^2)^2 f_{UM}^2 + b_0^2 \omega^2 f_{UB_0}^2 \right) + \right. \\ & + 2(h_{12} + h_{21}) \left((\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{01}^2 - \omega^2) f_{UM} f_{MU} + b_0^2 \omega^2 f_{UB_0} f_{B_0U} \right) + \\ & \left. + h_{22} \left((\omega_{01}^2 - \omega^2)^2 f_{MU}^2 + \omega^2 b_0^2 f_{B_0U}^2 \right) \right] / \\ & / \left[\left((\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) g_{MM} - \omega^2 g_{B_0B_0} b_0^2 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \omega^2 b_0^2 \left((\omega_{01}^2 - \omega^2) g_{MB_0} + (\omega_{02}^2 - \omega^2) g_{B_0M} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где ω_{01}, ω_{02} – «собственные» частоты, h_{ij}, f_{ij}, g_{ij} – вещественный числа, которые определяются на основе параметров системы $m_1, m_2, k_1, k_0, \beta_0$,

Условие постоянства амплитуды на собственной частоте $A(\omega_{sob}) = C_1$ позволяет определить демпфирование b_0 . Введя безразмерный параметр

$\beta_0 = b_1/b_0$, можно получить уравнение для расчета коэффициента трения b_0 как решение квадратного уравнения:

$$C_1^2 (\omega_{01}^2 g_{B_0 B_0})^2 b_0^4 + \omega_{01}^2 \left(C_1^2 ((\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2) g_{B_0 M})^2 - \right. \\ \left. - (h_{11} f_{UB_0}^2 + 2(h_{12} + h_{21}) f_{UB_0} f_{B_0 U} + h_{22} f_{B_0 U}^2) \right) b_0^2 - h_{11} (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2)^2 f_{UM}^2 = 0. \quad (9)$$

Расчет коэффициента трения b_0 с учетом требований (6) к собственной частоте системы с нулевым трением определяет множество параметров системы, обеспечивающих одновременно и постоянство собственной частоты системы C_0 и постоянство значения C_1 амплитудно-частотной характеристики.

IV. Вычислительный эксперимент. Для визуализации результатов проведен вычислительный эксперимент для системы с параметрами: $m_1 = 100$ кг, $m_2 = 1000$ кг, $k_1 = 10^7$ Н/м, $k_0 = 10^6$ Н/м, $b_1 = 800$ Н·с/м, $b_0 = 80$ Н·с/м. Резонансная частота и амплитуда для данной системы составили $C_0 = 30,138$ рад/с, $C_1 = 4,18E-05$ м/Н.

На рисунке 3 представлено семейство амплитудно-частотных характеристик, полученных при варьировании коэффициента жесткости k_0 в диапазоне $(9,9E+5 \dots 1,4E+6)$.

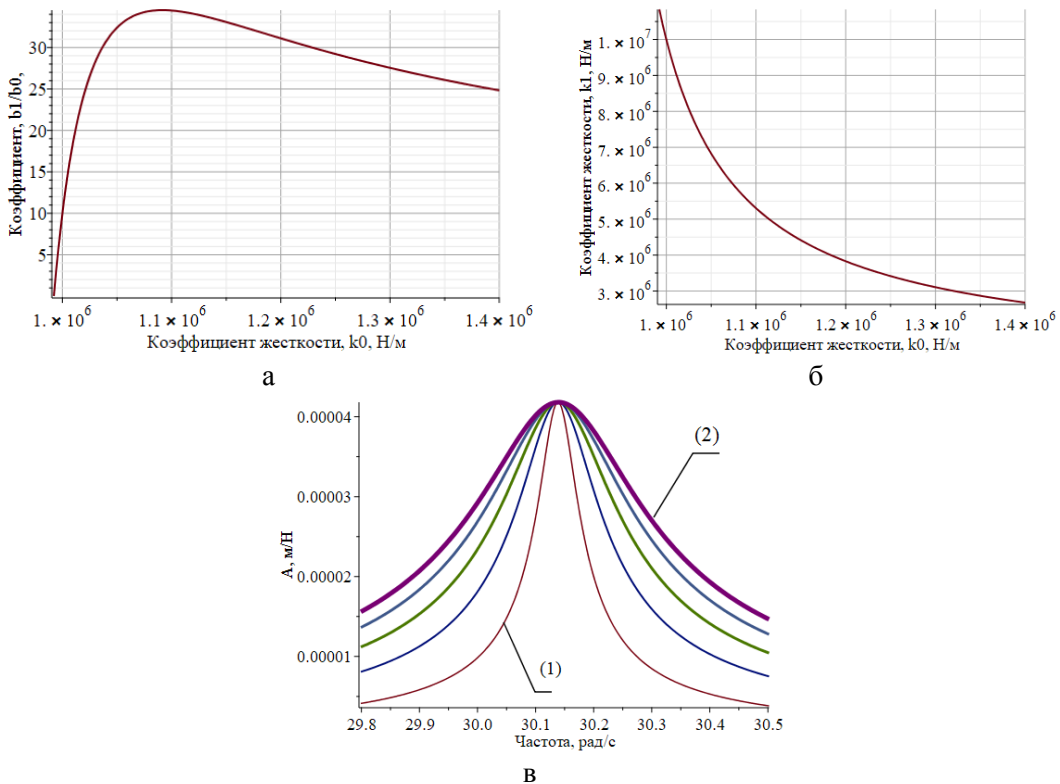


Рис. 3. Семейство амплитудно-частотных характеристик, удовлетворяющих условиям постоянства частоты и амплитуды при различном демпфировании

На рисунке 3 представлено семейство амплитудно-частотных характеристик, соответствующих разным значениям k_0 (и подобранным для них параметрам, обеспечивающим постоянство C_0 и C_1). Безразмерный коэффициент β_0 может быть выражен из условий $A(\omega_{sob})=C_1$ (рис. 3, а) с учетом зависимости k_1 (рис. 3, б). Графики (рис. 3, в) наглядно демонстрируют, что при фиксированных частоте и амплитуде резонанса форма и ширина пика могут существенно различаться, что подтверждает возможность оптимизации.

Заключение. Разработан графоаналитический метод синтеза параметров резонансной вибрационной машины с двумя степенями свободы, направленный на улучшение ее динамического качества. Метод позволяет определить связи между массовыми, жесткостными и демпфирующими параметрами системы, обеспечивающие одновременное выполнение требований к резонансной частоте и амплитуде колебаний рабочего органа.

Показано, что даже при жестко заданных значениях частоты и амплитуды резонанса существует множество комбинаций параметров системы, которые обеспечивают различную ширину резонансного пика. Это позволяет ставить и решать задачу условной оптимизации по критерию максимальной ширины пика, что повышает устойчивость резонансного режима работы вибрационной машины к изменению внешних условий и разбросу параметров.

Полученные аналитические зависимости и результаты численного моделирования могут быть использованы для инженерного расчета и проектирования высокоэффективных резонансных вибрационных технологических машин.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: КомКнига, 2006. – 439 с.
2. Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Динамика резонансных вибромашин с самосинхронизирующимися дебалансными вибровозбудителями. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2020. – 168 с.
3. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Зедгенизов В.Г., Миронов А.С. Разработка методов и средств управления динамическим состоянием и виброизоляцией вибрационных технологических машин // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. – 2025. – № 32. – С. 22-29.
4. Елисеев А.В., Миронов А.С. Устройства преобразования движений в формировании динамического качества колебаний рабочих органов вибрационных технологических машин // Современные проблемы теории машин. – 2025. – №19. – С. 43-46.
5. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
6. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.
7. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Mathematical Modeling in Machine Transport Dynamics. – Hershey, PA: IGI Global, 2025. – 330 p.

References

1. Timoshenko S.P. Vibrations in engineering. – M.: KomKniga, 2006. – 439 p.
2. Panovko G.Ya., Shokhin A.E. Dynamics of resonant vibration machines with self-synchronizing unbalanced vibration exciters. – Izhevsk: Izhevsk Institute of Computer Research, 2020. – 168 p.
3. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Zedgenizov V.G., Mironov A.S. Development of methods and tools for controlling the dynamic state and vibration isolation of vibrating technological machines // Transport, mining and construction engineering: science and production. 2025, no. 32, pp. 22-29.
4. Eliseev A.V., Mironov A.S. Motion transformation devices in the formation of the dynamic quality of vibrations of the working organs of vibrating technological machines // Modern problems of machine theory. 2025, no. 19, pp. 43-46.
5. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. – Springer International Publishing, 2020. – 521 p.
6. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.
7. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K. Mathematical Modeling in Machine Transport Dynamics. – Hershey, PA: IGI Global, 2025. – 330 p.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования eavsh@ya.ru	Mironov Artem Sergeevich – applicant, REC of modern technologies, system analysis and modeling

Received 16.09.2025