

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-49-24-29>

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ ВДОЛЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ СТЕРЖНЯ

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.², Майстришин М.М.¹

¹*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия;*

²*Черноморское высшее военно-морское орденов Нахимова и Красной звезды училище имени П.С. Нахимова, Севастополь, Россия*

Ключевые слова: материальная точка, сложное движение, полярная система координат, оптимальное управление, энергоемкость управлений.

Аннотация. Применено оптимальное управление движением сосредоточенной массы (материальной точки) вдоль стержня, который вращается вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения движения записаны в полярной системе координат. Задаются разные законы поступательного и вращательного движения (в виде перемещения, скорости и ускорения), по которым находится движущая сила и вращающий момент. Сопоставляются результаты по энергетическим затратам, полученные при использовании классического управления и реверсионно конструируемого. Показано преимущество использованного нового типа управления.

CONCENTRATED MASS MOTION CONTROL ALONG A ROD ROTATING AROUND A FIXED AXIS

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.², Maystrishin M.M.¹

¹*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;*

²*Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia*

Keywords: material point, complex motion, polar coordinate system, optimal control, control energy intensity.

Abstract. Optimal control of the motion of a concentrated mass (material point) along a rod rotating around a fixed axis is applied. The differential equations of motion are written in a polar coordinate system. Different laws of translational and rotational motion are specified in the form of displacement, speed and acceleration, by which the driving force and torque are found. The results on energy costs obtained using classical control and reversibly constructed control are compared. The advantage of the new type of control is shown.

Введение

Необходимо прежде всего отметить, что в классической работе [1] заложены основы моделирования оптимально управляемого движения систем.

Монография [2] посвящена решению не полных обратных задач оптимального управления, в которых, однако, не уделено внимание восстановлению функционалов по дифференциальным уравнениям движения.

В [3] проведено решение задачи оптимального перемещения упругого объекта по прямой с использованием манипулятора, работающего в полярной системе координат. Перемещение, скорость и ускорение при движении сосредоточенной массы найдены реверсионно, показано, что такое движение оптимально в смысле существования минимума неклассического функционала-критерия оптимальности.

В [4] оценена энергоёмкость управляемого поступательного движения упругого объекта при конструировании управления типа разгон-торможение и дано сравнение энергозатрат с известными классическими управлениями. Для практической реализации такого управления необходимо реализовать функцию, которая появляется скачкообразно в начальный момент времени (разгон) и с обратным знаком в момент окончания движения.

Применение алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления (названо реверсионным исчислением) в случаях поиска оптимальных управления движением объектов дано в работе [5]. Дальнейшему обоснованию и развитию реверсинного принципа оптимальности посвящена монография [6], в которой на ряде примеров обращено особое внимание на необходимые и достаточные условия экстремума восстановленных функционалов-критериев.

Движение материальной точки в полярной системе координат изображено на рисунке 1.

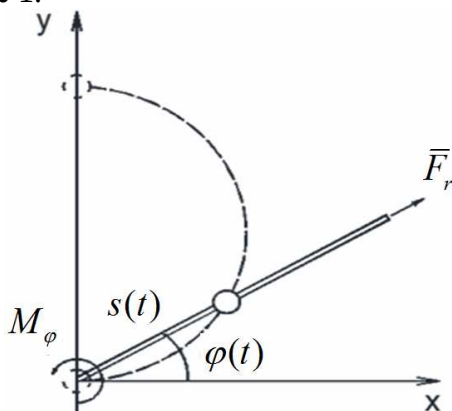


Рис. 1. Управляемое движение материальной точки в полярной системе координат ($\varphi(t)$, $s(t)$ – полярные координаты)

При поступательном движении с управлением типа разгон-торможение по прямой, как известно:

$$S(t) = \frac{Lt^2(3T + 2t)}{T^3}, \quad V(t) = \frac{dS(t)}{dt}, \quad U(t) = \frac{dV(t)}{dt}, \quad (1)$$

где L – общее перемещение за время T .

Для движения сосредоточенной массы по радиусу дифференциальное уравнение (без учета сопротивления) принято в виде:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mS\omega^2 + F_r(t), \quad (2)$$

где S – расстояние (полярная координата); m – масса; ω – угловая скорость вращения стержня.

Из (2) управляющее воздействие вдоль стержня (в радиальном направлении)

$$F_r = m \frac{d^2 S}{dt^2} - m S \omega^2, \quad (3)$$

где m – сосредоточенная масса; ω – угловая скорость оптимального вращения невесомого стержня.

Во вращательном оптимальном движении кинематические параметры записаны по аналогии с (1):

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_* t^2 (3T - 2t)}{T^3}, \quad \omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad \varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение вращения стержня с координатой $S(t)$ сосредоточенной массы

$$(J_c + mS^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -2m\omega VS + M_\varphi, \quad (5)$$

где J_c – физический момент инерции стержня (далее принято $J_c = 0$); M_φ – движущий вращающий момент.

В уравнении (5) учтен момент от силы инерции Кориолиса. Из (5) для движущего момента следует:

$$M_\varphi = (J_c + mS^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2m\omega VS, \quad (6)$$

где J_c – физический момент инерции стержня, по которому движется сосредоточенная масса.

Численный пример. Исходные данные: $m = 1$ кг; $T = 1$ с; $L = 1$ м; $\varphi_* = \pi/2$.

Для движения вдоль стержня графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$ при классическом управлении (задача Лагранжа) изображены на рисунке 2.

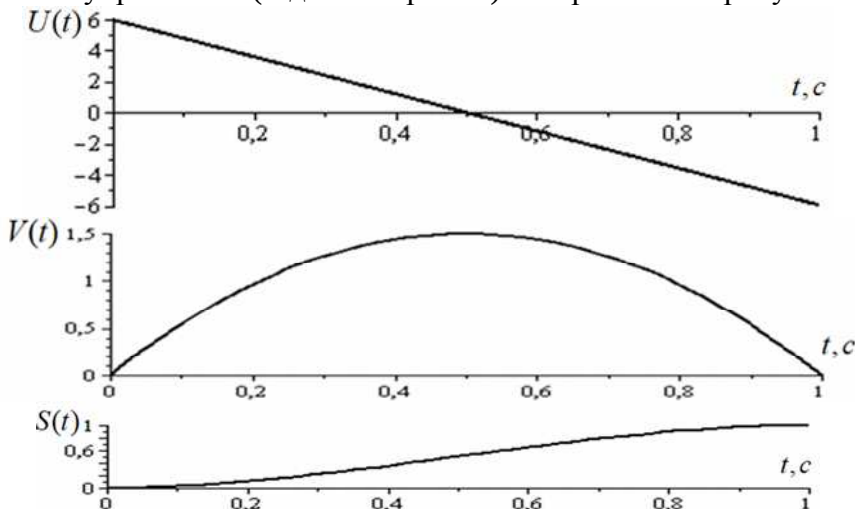


Рис. 2. Ускорение, скорость, перемещение при классическом разгоне-торможении

График управляющего воздействия (вдоль стержня) приведен на рисунке 3.

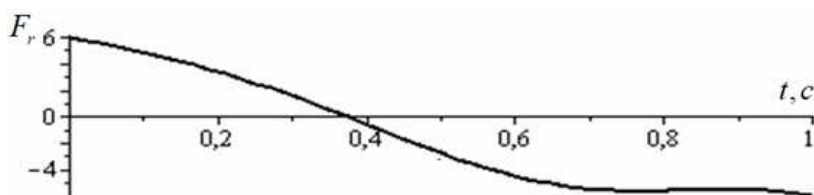


Рис. 3. График управляющего воздействия при классическом управлении

С учетом характера управляющего воздействия затрачиваемая энергия на движение вдоль стержня и при его повороте вычисляется следующим образом:

$$A_r = \int_0^{0,4} (F_r V) dt + \int_{0,4}^1 (F_r V) dt = 3,4856 \text{ Дж},$$

$$A_\phi = \int_0^{0,4} M_\phi \omega dt + \int_{0,4}^1 M_\phi \omega dt = 3,4851 \text{ Дж}.$$

В случае использования реверсионно конструируемого управления для движения вдоль стержня следует:

$$S(t) = \frac{L \left(\frac{(T-2t)^5}{T^4} + 10t - T \right)}{8T}; \quad V(t) = \frac{dS(t)}{dt}; \quad U_r(t) = \frac{dV(t)}{dt}.$$

Для вращения по аналогии с предыдущим результатом:

$$\Phi(t) = \frac{\Phi_* \left(\frac{(T-2t)^5}{T^4} + 10t - T \right)}{8T}; \quad \omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}; \quad \varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}.$$

При прежних исходных данных график $F_r(t)$ изображен на рисунке 4.

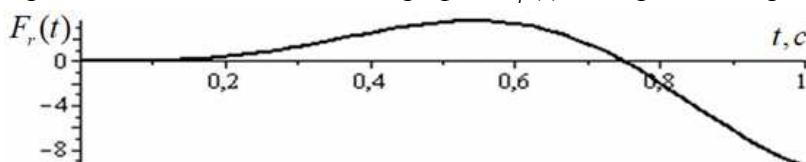


Рис. 4. График $F_r(t)$ – усилие, реализующее движение вдоль стержня

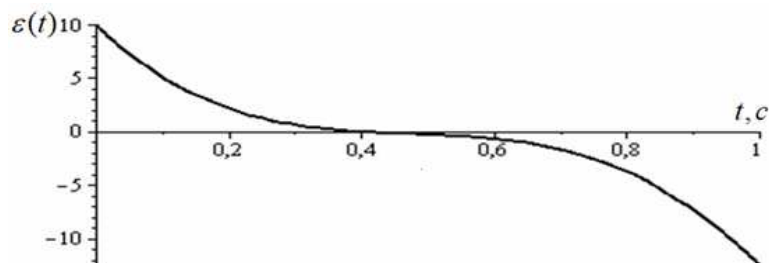


Рис. 5. График углового ускорения при реверсионном управлении

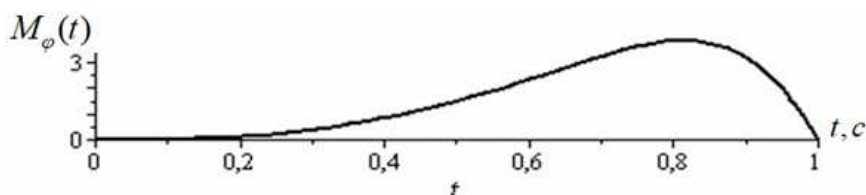


Рис. 6. График вращательного момента при реверсионном управлении

Движущий (вращающий) момент, согласно уравнению (5), находится по (6).

Графики $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$ по своему характеру не отличаются от графиков, приведенных на рисунке (2). График $\varepsilon(t)$ приведен на рисунке 5, график $M_\varphi(t)$ изображен на рисунке 6.

Вычисление затраченной энергии выполнено при поступательном и вращательном движениях. Соответственно энергия перемещения массы m вдоль стержня $A_r = 1,485$ Дж, энергия вращения $A_\varphi = 1,8505$ Дж. Очевидна экономия энергозатрат.

Найдено решение простой задачи совмещенного управляемого движения при вращении стержня с движением сосредоточенной массы вдоль стержня (руки манипулятора).

Заключение

Принципиальным результатом является подтверждение экономии энергии при совмещенном оптимальном движении материальной точки (в полярной системе координат). Получены такие управляющие воздействия, которые отражают свойство минимального энергетического принуждения для достижения цели движения – из исходного состояния покоя в конечное состояние покоя.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1963. – 476 с.
2. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные системы. – М.: Наука, 1987. – 307 с.
3. Бохонский А.И. Оптимальное перемещение упругого объекта в полярных координатах // Машиностроение: инновационные аспекты развития: Материалы международной научно-практической конференции. – Санкт-Петербург: СПбФ НИЦ МС, 2018. – №1. – С. 6-8.
4. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объекта // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.
5. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности: Монография. – М.: Вузовский учебник, ИНФРА-М., 2016. – 174 с.
6. Бохонский А.А., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Оптимальное переносное движение объектов конечно жесткости: Монография. – СПб.: Медиапапир, 2024. – 154 с.

References

1. Krasovsky N.N. Theory of motion control. – M.: Science, 1963. – 476 p.
2. Krutko P.D. Inverse problems of dynamics of controlled systems: Linear systems. – Moscow: Science, 1987. – 307 p.
3. Bokhonskiy A.I. Optimal movement of an elastic object in polar coordinates // Mechanical engineering: innovative aspects of development: Proceedings of the international scientific and practical conference. – SPb.: SPbF SRC MS, 2018. – No. 1. – P. 6-8.
4. Bokhonsky A.I. Energy intensity of object displacement control // Fundamental Principles of Mechanics. 2017, no. 2, pp. 38-41.
5. Bokhonsky A.I. The reversion principle of optimality: Monograph. – M.: University textbook, INFRA-M., 2016. – 174 p.
6. Bokhonsky A.A., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Optimal portable movement of objects of finite rigidity: Monograph. – SPb.: Mediapapir, 2024. – 154 p.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonskiy Aleksandr Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the Department of digital design
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Майстришин Михаил Михайлович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Автоматизация и технологии машиностроения»	Maystrishin Mikhail Mikhailovich – candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of automation and mechanical engineering technologies
mihail.maystrishin@gmail.com	

Received 03.09.2025