

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-48-20-26>

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОНСЕНСУС В КООПЕРАТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ МУЛЬТИРОБОТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Фам К.Ф.

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия*

Ключевые слова: алгоритм консенсуса, кооперативное управление, мультироботные системы, децентрализованное управление.

Аннотация. В данной работе рассматривается задача достижения информационного консенсуса в кооперативном управлении мультироботными системами. Исследуются модели распространения информации в дискретном и непрерывном времени. На основе теории графов и теории линейных систем предлагается топология взаимодействия, обеспечивающая достижение информационного консенсуса между роботами при ограниченной и локальной коммуникации. Численное моделирование в среде MATLAB подтверждает полученные теоретические результаты.

INFORMATIONAL CONSENSUS IN COOPERATIVE CONTROL OF MULTI-ROBOT SYSTEMS

Pham Q.P.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: consensus algorithm, cooperative control, multi-robot systems, decentralized control.

Abstract. This paper addresses the problem of achieving informational consensus in cooperative control of multi-robot systems. Models of information propagation are analyzed in both discrete-time and continuous-time domains. Based on graph theory and linear system theory, an interaction topology is proposed that ensures information consensus among robots under limited and local communication are formulated. Numerical simulations conducted in MATLAB validate the theoretical results.

Введение

В настоящее время активно ведутся исследования в области мультироботных систем, направленные на кооперативное управление как гетерогенными, так и гомогенными системами автономных роботов, включая воздушные, наземные и водные транспортные средства. Такие системы обладают важными преимуществами, включая гибкость, масштабируемость и устойчивость к отказам, и находят широкое применение как в гражданской, так и в военной сферах [1-3].

Кооперативное управление несколькими автономными роботами представляет собой более сложную задачу по сравнению с управлением одним роботом, что обусловлено ограничениями в сенсорных возможностях, пропускной способности каналов связи и вычислительных ресурсах. В результате централизованное управление становится непрактичным для систем большого масштаба, тогда как децентрализованное управление представляет собой более реалистичную альтернативу [4]. В

децентрализованной системе каждый робот независимо формирует управляющие сигналы, используя собственные датчики и информацию, полученную от соседних роботов, действуя совместно для выполнения общей задачи. Одна из основных задач кооперативного управления заключается в разработке алгоритмов передачи данных, позволяющих всем роботам достичь консенсуса по параметрам общей выполняемой задачи, несмотря на потери данных и динамически изменяющуюся топологию информационного взаимодействия [5].

В настоящей работе рассматривается информационный консенсус в мультироботной системе типа «ведущий-ведомый», в которой один или несколько роботов, назначенные ведущими, изначально обладают параметрами общей задачи. Основное внимание уделяется анализу топологии информационного взаимодействия роботов, обеспечивающей достижение консенсуса. Коммуникационная сеть моделируется в виде ориентированного графа, в котором глобально достижимые вершины соответствуют ведущим роботам. Ведомые обновляют свои оценки параметров задачи посредством локального взаимодействия с соседями. Анализируются дискретные и непрерывные модели распространения информации, и выводятся необходимые и достаточные условия для достижения консенсуса [6].

Сведение из теории матриц

Рассмотрим несколько основных понятий из теории матриц [7]. Квадратная **матрица** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется неотрицательной (соответственно положительной), если $a_{ij} \geq 0$ (соответственно $a_{ij} > 0$) для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Матрица A называется строчно-стохастической, если она неотрицательна и $A \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$. Ненулевые векторы $v \in \mathbb{R}^n$ и $w \in \mathbb{R}^n$ являются правым и левым собственными векторами матрицы A , соответствующими собственному значению λ , если $A\lambda = \lambda v$ и $w^T A = \lambda w^T$. Алгебраическая кратность собственного значения λ – это его кратность как корня характеристического многочлена матрицы A . Геометрическая кратность собственного значения λ – это число линейно независимых соответствующих собственных векторов. Собственное значение называется простым, если его алгебраическая и геометрическая кратности равны 1 и полупростым, если его алгебраическая и геометрическая кратности равны. Спектр $\text{spec}(A)$ матрицы A – это множество собственных значений. Спектральный радиус матрицы A – это максимальная норма собственных значений $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{spec}(A)\}$.

Матрица A называется полусходимой, если $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ существует, и сходимой, если она полусходимая и $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \mathbf{0}_n$. Квадратная матрица A является сходимой тогда и только тогда, когда её спектральный радиус $\rho(A) < 1$ и полусходимой тогда и только тогда, когда 1 является полупростым собственным значением, а все остальные собственные значения имеют величину меньше 1.

Сведение из алгебраической теории графов

Рассмотрим несколько основных понятий из алгебраической и спектральной теории графов [8-10]. Сеть, состоящая из n роботов, может быть представлена в виде ориентированного графа. Ориентированный граф (орграф) порядка n это пара $G=(V,E)$, где V – множество из n элементов, называемых вершинами (узлами), а E – множество упорядоченных пар вершин, называемых дугами. Для $u,v \in V$, пара (u,v) обозначает ориентированная дуга из вершины u в вершину v . Орграф (V',E') называется подграфом орграфа (V,E) если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф (V',E') называется остовным подграфом орграфа (V,E) , если он является подграфом и $V'=V$. Ориентированный путь в орграфе – это упорядоченная последовательность вершин, в которой каждая пара последовательных вершин соединена ориентированной дугой графа. Ориентированный цикл – это путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине. Орграф называется ациклическим, если он не содержит циклов.

Орграф G называется сильно связным, если существует ориентированный путь от любой вершины к любой другой вершине. Орграф G обладает глобально достижимой вершиной, если существует хотя бы одна вершина, в которую можно попасть из любой другой вершины по ориентированному пути. Сток в орграфе G – это вершина, в которую входят дуги, но из которой не выходит ни одной дуги. Следовательно, сток является глобально достижимой вершиной. Сильно связный орграф называется периодическим, если существует число $k > 1$, называемое периодом, которое делит длину любого цикла графа. Если такого периода не существует, то граф называется аperiodическим.

Элементы бинарной матрица смежности $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ и Лапласовской матрицы $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ орграфа G определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}, \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ \sum_{h=1, h \neq i}^n a_{ih}, & i = j \end{cases}.$$

Информационный консенсус в непрерывных линейных системах

Топология взаимодействия роботов задается в виде орграфа G , в котором глобально достижимая вершина соответствует ведущему. Оценка состояния $x \in \mathbb{R}$ роботом i в момент времени t обозначается как x_i , $i=1,...,n$. Лапласовская матрица L определяет непрерывную динамику распространения информации в сети:

$$\dot{\mathbf{x}} = L\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ – вектор начальных оценок.

Лемма 1 [6]. G содержит глобально достижимую вершину тогда и только тогда, когда собственное значение 0 является простым.

Лемма 2 [6]. Если G содержит глобально достижимую вершину, множество точек равновесия системы (1) является $\text{span}\{\mathbf{1}_n\} = \{\beta \mathbf{1}_n \mid \beta \in \mathbb{R}\}$.

Теорема. Пусть G содержит сток i . Тогда решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1) удовлетворяет условию:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = (\mathbf{w}^T \mathbf{x}(0)) \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{w} = [0 \ \dots \ w_i \ \dots \ 0]^T$ и $w_i = 1$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что все ненулевые собственные значения $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_2$ матрицы $\mathbf{L}$ имеют строго положительные действительные части, т.е. $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, $i = 2, \dots, n$.

Жорданова нормальная форма матрицы $\mathbf{L} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T}$ имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_m \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{T}$ – обратимая матрица; каждый блок которой $\mathbf{J}_k$, $k = 1, \dots, m$, представляет собой квадратную матрицу размера s_k и имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{D}_k + \mathbf{N}_k,$$

$$\text{где } \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s_k \times s_k}, \quad \mathbf{N}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s_k \times s_k}.$$

Поскольку матрицы $\mathbf{D}_k$ и $\mathbf{N}_k$ являются коммутирующими, то имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{J}_k t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{D}_k t} e^{-\mathbf{N}_k t} = \mathbf{0}_{s_k}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{L} t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{T}^{-1} e^{-\mathbf{J} t} \mathbf{T} \mathbf{x}(0) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(0) \mathbf{v},$$

где $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ – левое и правое доминирующие собственные вектора.

Из леммы 2 следует, что $\mathbf{v} = \mathbf{1}_n$ и $\mathbf{w} = [0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$. Теорема доказана.

Динамика распространения информации имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_m \mathbf{X},$$

где m – количество оцененных параметров; $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \cdot m}$; $\mathbf{I}_m$ – единичная матрица размера m ; $\otimes$ – произведение Кронекера.

Информационный консенсус в дискретных линейных системах

Рассмотрим динамику распространения информации во времени в дискретной форме. Оценка параметра роботом i параметр $x \in \mathbb{R}$ на дискретном временном шаге k обозначается как $x_i[k]$, $i = 1, \dots, n$.

Матрица смежности $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяет дискретную линейную систему следующим образом:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (2)$$

или, что эквивалентно, $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$, где $\mathbf{x}[k] = [x_1[k] \ \dots \ x_n[k]]^T \in \mathbb{R}^n$.

Теорема. Пусть G содержит глобально достижимую вершину i . Тогда решение $\mathbf{x}(k)$ системы (2) удовлетворяет условию:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = (\mathbf{w}^T \mathbf{x}(0)) \mathbf{1}_n,$$

где $\mathbf{w} = [0 \ \dots \ w_i \ \dots \ 0]^T$ и $w_i = 1$.

В общем случае динамика распространения информации имеет вид

$$\mathbf{X}[k+1] = \bar{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{I}_m \mathbf{X}[k],$$

где m – количество оцененных параметров; $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \cdot m}$; $\mathbf{I}_m$ – единичная матрица размера m ; $\bar{\mathbf{A}}$ – матрица смежности; $\otimes$ – произведение Кронекера.

Результаты компьютерного моделирования

Для подтверждения полученных теоретических результатов проведено численное моделирование примера управления мультироботными системами в среде MATLAB. Рассматривается группа из пяти роботов, координирующих согласно стратегии «ведущий–ведомый». Ведущий робот обладает информацией о желаемой скорости, соответствующей пути, который необходимо следовать. Коммуникационная сеть моделируется в виде орграфа, в котором ведущий является глобально достижимой вершиной. Рассматривается достижение информационного консенсуса как в дискретной, так и в непрерывной системе. Результаты численного моделирования представлены на рисунках 1 и 2.

Матрица смежности и лапласиана имеют вид

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

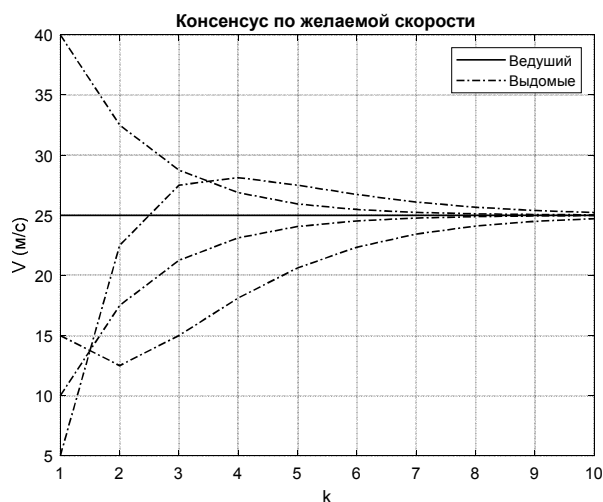


Рис. 1. Консенсус в дискретной линейной системе

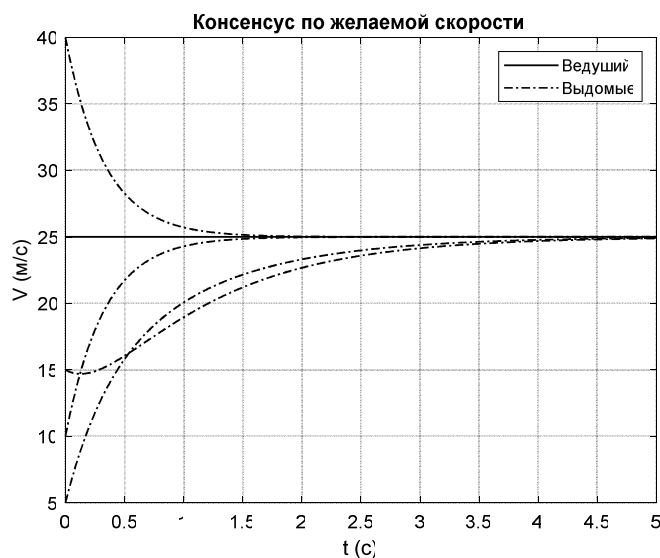


Рис. 2. Консенсус в непрерывной линейной системе

Заключение

Результаты моделирования показывают, что консенсус между ведущим и ведомыми достигается как в дискретной, так и в непрерывной динамике. Это подтверждает эффективность предложенной топологии, обеспечивающей согласование информации на основе только локальных взаимодействий, без глобальной связи или централизованного управления.

Список литературы / References

1. Jürgen Scherer, Saeed Yahyanejad, Samira Hayat, Evsen Yanmaz, Torsten Andre, Asif Khan, Vladimir Vukadinovic, Christian Bettstetter, Hermann Hellwagner, Bernhard Rinner. An autonomous multi-UAV system for search and rescue // Proceedings of the First Workshop on Micro Aerial Vehicle Networks, Systems, and Applications for

- Civilian Use (DroNet '15). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 2015, pp. 33-38. doi.org/10.1145/2750675.27506835.
2. Sundaram B., Palaniswami M., Reddy S., Sinickas M. Radar localization with multiple unmanned aerial vehicles using support vector regression // 2005 3rd International Conference on Intelligent Sensing and Information Processing, Bangalore, India, 2005, pp. 232-237. DOI: 10.1109/ICISIP.2005.1619441.
 3. Luis Merino, José Ramiro Martínez-de Dios, Aníbal Ollero. Cooperative Unmanned Aerial Systems for Fire Detection, Monitoring, and Extinguishing // Valavanis, K., Vachtsevanos, G. (eds) Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. Springer, Dordrecht. 2014, pp. 2693-2722. doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_74.
 4. Ahn H.-S. Preliminary Background // Formation Control. Studies in Systems, Decision and Control. Springer, Cham, 2020, vol. 205, pp. 3-26. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15187-4_1.
 5. Ren W., Beard R.W. Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications. Springer, Cham, 2008.
 6. Bullo F. Lectures on Network Systems. – Kindle Direct Publishing, 2024. – 376 p.
 7. Horn R.A., Johnson C.R. Matrix Analysis. – Cambridge University Press, 1994. – 643 p.
 8. Bullo F., Cortez J., Martinez S. Distributed control of robotic networks. – Princeton Univ. Press, 2009.
 9. Mohar B. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs // Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications. NATO ASI Ser. C 497, Kluwer, 1997, pp. 225-275.
 10. Ren W., Beard R.W. Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005, vol. 50, no. 5, pp. 655-661. DOI: 10.1109/TAC.2005.846556.

Фам Куок Фонг – аспирант	Pham Quoc Phong – postgraduate student
hvkts1421996@gmail.com	

Received 26.06.2025