

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-47-88-95>

ПРОБЛЕМНЫЕ АСПЕКТЫ КОНСЕНСУСА МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Ян Шуай

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Ключевые слова: мультиагентные системы, алгоритмы консенсуса, временные задержки, насыщение актуаторов, отказоустойчивое управление, распределенное управление.

Аннотация. В данной статье представлен анализ проблемы консенсуса мультиагентных систем в условиях ограничений. Рассмотрены коммуникационные ограничения (временные задержки, потери данных) и ограничения исполнительных механизмов (насыщение, отказы). Выявлен парадоксальный эффект снижения устойчивости к задержкам при повышении связности графа взаимодействий. Исследован феномен "стабилизации через ограничения", при котором взаимодействие различных типов ограничений способно расширять область устойчивости системы. Проанализированы методы полуглобального и глобального управления для систем с насыщением, а также адаптивные стратегии обеспечения отказоустойчивости.

PROBLEMATIC ASPECTS OF MULTI-AGENT CONSENSUS SYSTEMS UNDER CONSTRAINTS

Yang Shuai

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Keywords: multi-agent systems, consensus algorithms, time delays, actuator saturation, fault-tolerant control, distributed control.

Abstract. This article presents an analysis of the consensus problem in multi-agent systems under constraints. Communication constraints (time delays, data loss) and actuator constraints (saturation, failures) are examined. A paradoxical effect is revealed where increased graph connectivity reduces robustness to delays. The phenomenon of "stabilization through constraints" is investigated, where the interaction of different types of constraints can expand the system's stability region. Semi-global and global control methods for systems with saturation are analyzed, as well as adaptive strategies for ensuring fault tolerance.

Введение

В эпоху стремительной цифровой трансформации вопросы координированного управления распределенными системами приобретают особую значимость. Мультиагентные системы (МАС), как революционная парадигма децентрализованного управления, благодаря своей адаптивности, отказоустойчивости и масштабируемости, стали одним из наиболее динамично развивающихся направлений в теории систем и управлении за последние два десятилетия [1].

В исследованиях МАС проблема консенсуса занимает, несомненно, центральное место. Сущность этой проблемы заключается в разработке децентрализованных алгоритмов, позволяющих группе автономных агентов достичь согласованного состояния посредством исключительно локальных

взаимодействий. Эта фундаментальная задача имеет широкий спектр практических приложений – от формирования строя беспилотных аппаратов до балансировки нагрузки в распределенных вычислительных сетях.

Исследования консенсуса берут начало в работах DeGroot в 1970-х годах, получили развитие в исследованиях Tsitsiklis по распределенным вычислениям, и в начале 2000-х были интегрированы в теорию управления благодаря пионерским работам Jadbabaie и соавторов [2]. Впоследствии Olfati-Saber и Murray разработали теоретическую основу консенсуса на базе теории графов и матриц Лапласа [3], а Ren и Beard расширили эту структуру на направленные переключающиеся топологии [4].

Практическая реализация консенсусных алгоритмов, однако, сталкивается с множеством ограничений, существенно влияющих на эффективность и надежность процессов согласования. Эти ограничения условно делятся на две категории: коммуникационные (временные задержки, потери данных, переменная топология) и ограничения исполнительных механизмов (насыщение актуаторов, ограничения скорости изменения управляющих воздействий, отказы оборудования). Исследование этих ограничений не только имеет фундаментальное научное значение, но и критически важно для создания надежных и эффективных МАС, способных функционировать в реальных, зачастую неблагоприятных условиях.

Моделирование МАС и постановка задачи консенсуса

Математическая формализация МАС рассматривает N взаимодействующих агентов в среде с возможными ограничениями. Динамика i -го агента в непрерывном времени представляется как:

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i) + \sum_{j \in N_i} \Gamma_{ij}(x_j, x_i),$$

где $f(\cdot)$ представляет внутреннюю динамику каждого агента, обычно в виде линейной системы Ax_i или цепи интеграторов; а $\Gamma_{ij}(\cdot)$ отражает взаимодействие между агентами, которое в задачах консенсуса обычно упрощается до $a_{ij}(x_j - x_i)$, где a_{ij} – сила связи.

Базовое определение консенсуса формулируется как асимптотическая сходимость состояний всех агентов:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Важные вариации включают: ε -приближенный консенсус ($\sup_{t \geq T} \|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \varepsilon$), где $\varepsilon > 0$ – допустимая погрешность, T – момент времени; консенсус за конечное время ($\|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \forall t \geq T$), где $T < \infty$; и консенсус с лидером ($\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0$), где $x_0(t)$ – состояние лидера [5].

Фундаментальные свойства графа влияния определяют возможность достижения консенсуса. Для неориентированных графов ключевое значение имеет связность, для ориентированных – наличие остова ориентированного дерева. Однако в присутствии различных ограничений

данные условия могут быть недостаточными, что существенно усложняет анализ и проектирование распределенных алгоритмов управления.

Проблемы консенсуса МАС при коммуникационных ограничениях

Временные задержки в каналах связи неизбежно возникают в распределённых системах вследствие физических ограничений скорости передачи сигналов. В контексте консенсуса это трансформирует модель взаимодействия агентов в систему с запаздыванием:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_j(t - \tau) + x_i(t - \tau)],$$

где τ – задержка в канале связи.

Консенсус достижим при условии $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}\right]$, связывающем допустимую задержку со спектральными свойствами графа взаимодействий [3]. Альтернативная оценка $\tau \leq \frac{\pi}{4d_{\max}(G)}$, где $d_{\max}(G)$ – максимальная степень

вершин графа, демонстрирует парадоксальную закономерность: чем выше связность графа, тем ниже устойчивость МАС к временным задержкам [6]. Этот контринтуитивный результат имеет прямую практическую значимость при проектировании топологий сетевых систем.

Неоднородные задержки и переключающаяся топология характеризуют более сложные сценарии, где каналы связи имеют разные задержки, а структура сети динамически меняется [7]:

$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in N_i} a_{ij}^{\sigma(t)} \kappa_{ij} [x_i - T_{ij}(x_j)],$$

где T_{ij} – оператор задержки, а $\sigma(t)$ характеризует изменение структуры сети во времени; κ_{ij} – коэффициент усиления между агентами i и j .

Ключевым условием достижения консенсуса в таких системах является наличие в объединенном графе взаимодействий совместно направленного остоного дерева – структуры, обеспечивающей принципиальную возможность распространения информации от определенного агента ко всем остальным участникам сети.

Потери данных в каналах связи имеют стохастическую природу, требующую вероятностного подхода к анализу. Применяется концепция устойчивости от входа к состоянию (ISS) и среднеквадратичного ограниченного консенсуса [8]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|x_i(t) - x_j(t)\|^2 \leq \varepsilon, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

где E – математическое ожидание, а ε представляет допустимое отклонение от идеального консенсуса.

Объединенная связность представляет собой фундаментальное свойство систем с переменной топологией, необходимое для достижения консенсуса. Математически оно формулируется как требование, чтобы

последовательность орграфов $\{\Gamma(t_1), \Gamma(t_1), \dots\}$ допускала разбиение на интервалы равномерно ограниченной длины, для каждого из которых объединение орграфов влияний содержит остовное исходящее дерево.

Проблемы консенсуса МАС при ограничениях исполнительных механизмов

Насыщение исполнительных механизмов является фундаментальным физическим ограничением актуаторов, неспособных обеспечить произвольно большие управляющие воздействия. Для систем с динамикой вида

$$\dot{x}_i = Ax_i + B\delta_{\Delta}(u_i),$$

где $\delta_{\Delta}(u_i) = \text{sgn}(u) \min\{|u|, \Delta\}$ – функция насыщения, существуют два основных подхода к достижению консенсуса [9]:

1. Полуглобальное управление с низкокоэффициентной обратной связью:

$$u_i(t) = K \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)),$$

где $K = B^T P(\epsilon)$ определяется из параметрического уравнения Риккати.

2. Глобальное нелинейное управление:

$$u_i = - \sum_{j=1}^N a_{ij} \tanh(K_x(x_i - x_j)) - \sum_{j=1}^N b_{ij} \tanh(K_v(v_i - v_j)),$$

где b_{ij} – весовые коэффициенты влияния скоростей соседних агентов; K_x и K_v – параметры нелинейного насыщения для позиционных и скоростных компонентов соответственно; x_i и v_i – переменные состояния, представляющие положение и скорость i -го агента соответственно.

Особая ценность второго метода заключается в обеспечении глобальной сходимости для МАС с двойными интеграторами даже при жестких ограничениях на управление. Недавние исследования также демонстрируют эффективность анти-виндап (anti-windup) техник для систем с насыщением, позволяющих компенсировать негативные эффекты от ограничения амплитуды управления.

Отказы исполнительных механизмов вносят элемент стохастичности в функционирование системы и моделируются как [10]:

$$u_{oi}(t) = \rho_i(t)u_{ih}(t) + r_i(t), t \geq t_{if},$$

где $\rho_i(t) \in (0,1]$ отражает степень деградации, а $r_i(t)$ – смещение при неисправности.

Методы обеспечения консенсуса при отказах подразделяются на пассивные (PFTC), основанные на априорной робастификации алгоритмов, и активные (AFTC), включающие мониторинг, детектирование отказов и адаптивную реконфигурацию управления.

Адаптивные подходы к отказоустойчивому консенсусу синтезируют достижения из теории систем с переменной структурой и адаптивного управления. Протокол вида:

$$u_i(t) = -\hat{K}_i(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)),$$

с динамической коррекцией коэффициента $\hat{K}_i(t)$ по закону:

$$\dot{\hat{K}}_i(t) = \gamma_i \left\| \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \right\|^2,$$

где γ_i – положительный коэффициент адаптации для i -го агента, определяющий скорость адаптации алгоритма к изменениям условий и потенциальным отказам; большие значения обеспечивают более быструю адаптацию, но могут снижать устойчивость системы к шумам измерений и возмущениям. Данный метод позволяет компенсировать как частичные деградации, так и полные отказы отдельных каналов управления. Перспективное направление исследований – многоцелевые протоколы, обеспечивающие баланс между скоростью сходимости, робастностью к отказам и энергоэффективностью.

Проблемы консенсуса МАС при комплексном влиянии различных ограничений

Взаимодействие коммуникационных и исполнительных ограничений порождает сложную структуру взаимозависимостей, существенно отличающуюся от результатов изолированного анализа каждого фактора. Примечательно, что сочетания разнородных ограничений могут порождать как деструктивные, так и конструктивные эффекты. Временные задержки в комбинации с насыщением актуаторов способны, вопреки ожиданиям, способствовать стабилизации системы. Задержки замедляют реакцию агентов на изменения состояния соседей, что в сочетании с ограничением управляющих воздействий предотвращает возникновение колебаний высокой интенсивности.

Феномен «стабилизации через ограничения» представляет собой парадоксальный эффект расширения области устойчивости системы при введении дополнительных ограничений [11]. В системах с двойными интеграторами под влиянием консенсусного протокола с высоким коэффициентом усиления, комбинация насыщения и задержки может восстанавливать устойчивую динамику там, где неограниченная система демонстрирует неустойчивость.

Например, рассмотрим систему из пяти агентов с динамикой двойных интеграторов, управляемых протоколом

$$\ddot{x}_i = -\alpha \delta_{\Delta} \left(\sum_{j \in N_i} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \right) - \beta \dot{x}_i.$$

При $\alpha = 10$, $\beta = 1$ система без задержек стабильна. Однако при задержке $\tau = 0,3$ секунды система без насыщения ($\Delta = \infty$) теряет устойчивость, в то время как введение ограничения насыщения $\Delta = 2$ восстанавливает стабильность даже при той же задержке.

Математически этот эффект иллюстрирует следующее: при больших значениях α система без насыщения ($\Delta = \infty$) может иметь осциллирующее или даже неустойчивое поведение для $\tau > 0$, тогда как при наличии насыщения система сохраняет устойчивость в более широком диапазоне задержек. Механизм насыщения ограничивает степень влияния задержанных сигналов, предотвращая чрезмерное усиление отклика системы, что и создает стабилизирующий эффект.

Наиболее сложные сценарии возникают при одновременном влиянии множественных ограничений различной природы. Анализ систем, объединяющих переменную топологию, неоднородные задержки, потери данных, насыщение и отказы механизмов, требует интеграции аналитических и вычислительных методов, включая гибридные функции Ляпунова-Красовского.

Перспективным направлением является разработка адаптивных протоколов консенсуса, способных динамически настраиваться в зависимости от состояния системы и характеристик ограничений. Алгоритмы, основанные на событийном управлении, демонстрируют значительный потенциал для эффективной работы в условиях переменных ограничений, оптимизируя использование ресурсов [12]. Понимание взаимодействия различных типов ограничений открывает новые перспективы для создания более эффективных алгоритмов достижения консенсуса в реалистичных условиях функционирования распределенных систем.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены ключевые аспекты проблемы консенсуса МАС в условиях ограничений. Анализ выявил: парадокс снижения робастности к задержкам при повышении связности в коммуникационных ограничениях; эффективность низкокоэффициентной обратной связи и нелинейных методов управления при ограничениях исполнительных механизмов; благоприятный эффект «стабилизации через ограничения» при взаимодействии различных типов ограничений.

Несмотря на достигнутые результаты, текущие исследования ограничены применимостью линейных моделей, ростом сложности анализа при множественных ограничениях и упрощенными предположениями о задержках. Эти ограничения определяют направления будущих исследований, особенно в создании аналитических структур, учитывающих взаимодействие ограничений, и разработке адаптивных алгоритмов для сложных сред.

Список литературы

1. Cao Y., Yu W., Ren W., Chen G. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination // Transactions on Industrial informatics. 2013, vol. 9, no. 1, pp. 4270438. DOI: 10.1109/TII.2012.2219061.
2. Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003, vol. 48, no. 6, pp. 988-1001. DOI: 10.1109/TAC.2003.812781.

3. Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533. DOI: 10.1109/TAC.2004.834113.
4. Ren W., Beard R.W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005, vol. 50, no. 5, pp. 655-661. DOI: 10.1109/TAC.2005.846556.
5. Ян Ш. О достижимости консенсуса в мультиагентных системах управления с лидером // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2025. – Т. 13, №1. – DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.023.
6. Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю. Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I. Асинхронные модели консенсуса // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №4. – С. 3-40. – DOI: 10.1134/S0005231019040019.
7. Jiang W., Chen Y., Charalambous T. Consensus of general linear multi-agent systems with heterogeneous input and communication delays // IEEE Control Systems Letters. 2020, vol. 5, no. 3, pp. 851-856. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3006452.
8. Амелина Н.О., Фрадков А.Л. Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №11. – С. 6-29.
9. Yang P., Zhang A., Bi W. Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with input saturation // Neural Processing Letters. 2022, vol. 54, no. 5, pp. 4211-4228. DOI: 10.1007/s11063-022-10805.
10. Ju Y., Ding D., He X., Han Q.-L., Wei G. Consensus control of multi-agent systems using fault-estimation-in-the-loop: Dynamic event-triggered case // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2021, vol. 9, no. 8, pp. 1440-1451. DOI: 10.1109/JAS.2021.1004386.
11. Yang D., Ren W., Liu X., Chen W. Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs // Automatica. 2016, vol. 69, pp. 242-249. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.03.003.
12. Zhu W., Jiang Z.P., Feng G. Event-based consensus of multi-agent systems with general linear models // Automatica. 2014, vol. 50, no. 2, pp. 552-558. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.11.023.

References

1. Cao Y., Yu W., Ren W., Chen G. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination // Transactions on Industrial informatics. 2013, vol. 9, no. 1, pp. 4270438. DOI: 10.1109/TII.2012.2219061.
2. Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003, vol. 48, no. 6, pp. 988-1001. DOI: 10.1109/TAC.2003.812781.
3. Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533. DOI: 10.1109/TAC.2004.834113.
4. Ren W., Beard R.W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005, vol. 50, no. 5, pp. 655-661. DOI: 10.1109/TAC.2005.846556.
5. Yang S. On the achievability of consensus in leader-following multi-agent control systems // Modeling, Optimization and Information Technologies. 2025, vol. 13, no. 1. DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.023.

6. Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Chebotarev P.Yu. Consensus in Asynchronous Multiagent Systems. I. Asynchronous Consensus Models // Automation and Remote Control. 2019, vol. 80, no. 4, pp. 644-672. DOI: 10.1134/S0005231019040019.
7. Jiang W., Chen Y., Charalambous T. Consensus of general linear multi-agent systems with heterogeneous input and communication delays // IEEE Control Systems Letters. 2020, vol. 5, no. 3, pp. 851-856. DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3006452.
8. Amelina N.O., Fradkov A.L. Approximate Consensus in the Dynamic Stochastic Network with Incomplete Information and Measurement Delays // Automation and Remote Control. 2012, vol. 73, no. 11, pp. 1765-1783.
9. Yang P., Zhang A., Bi W. Finite-time group consensus for second-order multi-agent systems with input saturation // Neural Processing Letters. 2022, vol. 54, no. 5, pp. 4211-4228. DOI: 10.1007/s11063-022-10805.
10. Ju Y., Ding D., He X., Han Q.-L., Wei G. Consensus control of multi-agent systems using fault-estimation-in-the-loop: Dynamic event-triggered case // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. 2021, vol. 9, no. 8, pp. 1440-1451. DOI: 10.1109/JAS.2021.1004386.
11. Yang D., Ren W., Liu X., Chen W. Decentralized event-triggered consensus for linear multi-agent systems under general directed graphs // Automatica. 2016, vol. 69, pp. 242-249. DOI: 10.1016/j.automatica.2016.03.003.
12. Zhu W., Jiang Z.P., Feng G. Event-based consensus of multi-agent systems with general linear models // Automatica. 2014, vol. 50, no. 2, pp. 552-558. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.11.023.

Ян Шуай – аспирант	Yang Shuai – postgraduate student
shuai.yang21@physics.msu.ru	

Received 30.04.2025