

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ДЛЯ КОСМИЧЕСКИХ МАНИПУЛЯТОРОВ ПОДОБНЫХ SSRMS

Яскевич А.В.

*ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева»,
Королев, Россия*

Ключевые слова: космический манипулятор, SSRMS, обратная задача кинематики по положению, геометрический подход, множественность решений, планирование траекторий.

Аннотация. Алгоритмы решения обратной кинематической задачи по положению используются при планировании траекторий космических манипуляторов, в частности при расчете исходной конфигурации для точного управления в ограниченной рабочей зоне. Алгоритм, описанный в данной работе, основан на геометрическом подходе. Он учитывает особенности кинематики конкретного манипулятора, в данном случае кинематики Space Station Remote Manipulation System. Он позволяет найти до восьми вариантов решения для каждой конфигурации руки. Этот алгоритм может быть использован при планировании траекторий движения для новых манипуляторов подобных SSRMS.

AN ALGORITHM FOR SOLVING OF POSITION INVERSE KINEMATICAL PROBLEM FOR SPACE ROBOTIC ARMS LIKE SSRMS

Yaskevich A.V.

Rocket Space Corporation “Energia” named after S.P. Korolev, Korolev, Russia

Keywords: space robotic arm, SSRMS, inverse kinematical problem for position, geometrical approach, solution multiplicity, path planning.

Abstract. Algorithms for solving of position inverse kinematical problem are used by path planning of space manipulators, partially by computation of their initial configuration for precise control in confined workspace. An algorithm considered in this paper based on geometrical approach. It takes into account of specific robotic arm kinematics, in this case Space Station Remote Manipulation System kinematics. It allows detect up to eight solutions for each arm configuration. This algorithm maybe used by path planning for new robotic arms similar to SSRMS.

Введение. Движение промышленного или космического манипулятора в рабочей зоне, соизмеримой с его размерами, выполняется по заранее определенной траектории, для характерных точек которой определяются наборы линейных и угловых координат захватного устройства. Эти декартовы координаты с помощью решения обратной кинематической задачи (ОКЗ) по положению преобразуются в обобщенные – перемещения звеньев в шарнирах относительно их исходного положения. Теоретические основы получения траекторий движения манипуляторов в виде наборов декартовых и обобщенных координат достаточно хорошо разработаны [1-8]. Космический манипулятор Space Station Remote Manipulation System (SSRMS), созданный компанией MDA Robotics совместно с канадским космическим агентством [9, 10], является де факто стандартом космического

манипулятора, способного шагать по поверхности орбитальной станции (ОС). Он имеет кинематику наиболее сложную среди всех механизмов со структурой в виде простой кинематической цепи. Алгоритм решения ОКЗ по положению для SSRMS в открытой печати не опубликован. Данная работа восполняет этот пробел. Описанный в ней алгоритм может быть использован для планирования траектории движения других, подобных SSRMS манипуляторов, в частности для расчета их исходной конфигурации, относительно которой задаются команды наведения на малые перемещения при управлении в ограниченной рабочей зоне.

Исходными данными при решении ОКЗ по положению являются векторы, определяющие положение и ориентацию ЗУМ. Вследствие кинематических особенностей манипулятора может существовать несколько вариантов решения. Для преодоления такой неопределенности в настоящей работе используется метод, предложенный В.П. Макарычевым и изложенный в книге [4]. Алгоритм решения ОКЗ записывается с помощью параметров, учитывающих альтернативные заранее не известные относительные положения звеньев. Каждое сочетание таких параметров задается извне и определяет одну из ветвей дерева возможных решений. При планировании траектории могут рассматриваться все ветви, при расчете исходного положения в процессах точного наведения только одна из них.

Предлагаемый алгоритм основан на геометрическом подходе и соответственно учитывает геометрические свойства исполнительного механизма манипулятора.

1. Геометрические свойства исполнительного механизма.

Исполнительный механизм космического манипулятора подобного SSRMS имеет восемь звеньев (с 0-го по 7-е) и семь вращательных шарниров. Его кинематическая схема в исходной конфигурации (при нулевых углах поворота) приведена на рисунке 1. Она является симметричной относительно центра 4-го шарнира, что позволяет каждому из конечных звеньев либо являться корневым, соединенным с базовой точкой на поверхности ОС, либо выполнять функции захватного устройства манипулятора (ЗУМ). В системе обозначений, принятой при описании движения, 0-е звено является корневым, а 7-е – это ЗУМ. На рисунке 1 длины звеньев 0-7 обозначаются константами $L_0, L_1, L_2, L_{3a}, L_{3b}, L_4, L_5, L_6, L_7$.

Каждое звено соединено с предшествующим входным, а с последующим выходным вращательными шарнирами, с которыми связаны системы координат (СК).

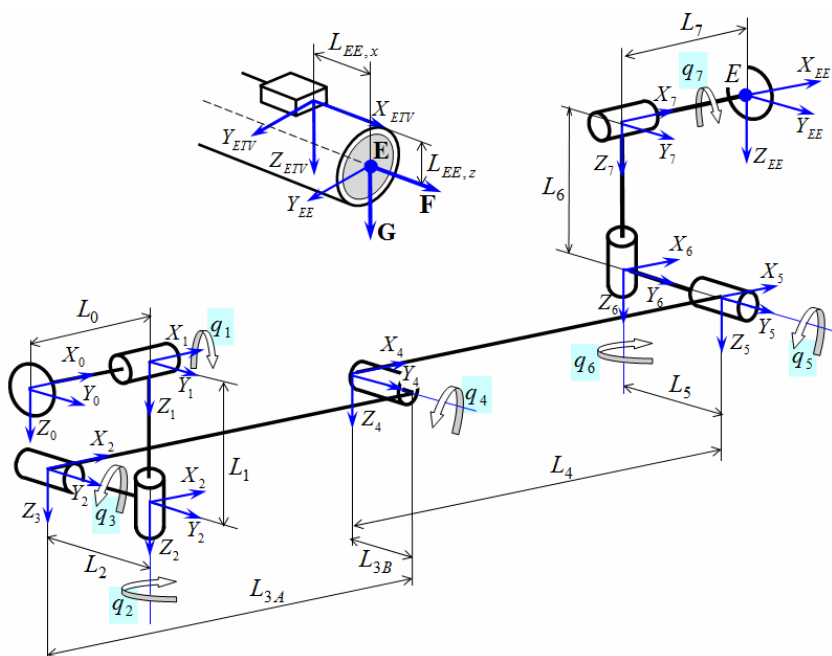


Рис.1. Кинематическая схема исполнительного механизма манипулятора в его исходной конфигурации

Углы поворота в шарнирах являются обобщенными координатами q_i , $i = \overline{1,7}$, определяющими текущую конфигурацию исполнительного механизма. При выбранных осях поворота им соответствуют матрицы α_i преобразования из СК $_i$ в СК $_{i+1}$

$$\alpha_{i \in \{1,7\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cq_i & sq_i \\ 0 & -sq_i & cq_i \end{bmatrix}, \quad \alpha_{i \in \{3,4,5\}} = \begin{bmatrix} cq_i & 0 & -sq_i \\ 0 & 1 & 0 \\ sq_i & 0 & cq_i \end{bmatrix}, \quad \alpha_{i \in \{2,6\}} = \begin{bmatrix} cq_i & sq_i & 0 \\ -sq_i & cq_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $sq_i = \sin q_i$, $cq_i = \cos q_i$, $i = \overline{1,7}$.

С учетом параллельности осей шарниров 3, 4 и 5 используются также матрицы

$$\alpha_{345} = \begin{bmatrix} cq_{34} & 0 & -sq_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ sq_{34} & 0 & cq_{34} \end{bmatrix}, \quad \alpha_{345} = \begin{bmatrix} cq_{345} & 0 & -sq_{345} \\ 0 & 1 & 0 \\ sq_{345} & 0 & cq_{345} \end{bmatrix},$$

где $sq_{34} = \sin(q_3 + q_4)$, $cq_{34} = \cos(q_3 + q_4)$, $sq_{345} = \sin(q_3 + q_4 + q_5)$, $cq_{345} = \cos(q_3 + q_4 + q_5)$.

Для получения однозначных решений ОКЗ угол q_1 поворота в первом шарнире фиксируется, его значение определяется при планировании траектории движения манипулятора. В этом случае механизм становится антропоморфным, его звенья 2, 3, 4 являются транспортирующими, а звенья 5, 6, 7 ориентирующими.

На рисунке 2 показаны некоторая текущая конфигурация манипулятора и геометрические объекты, которые используются при решении ОКЗ.

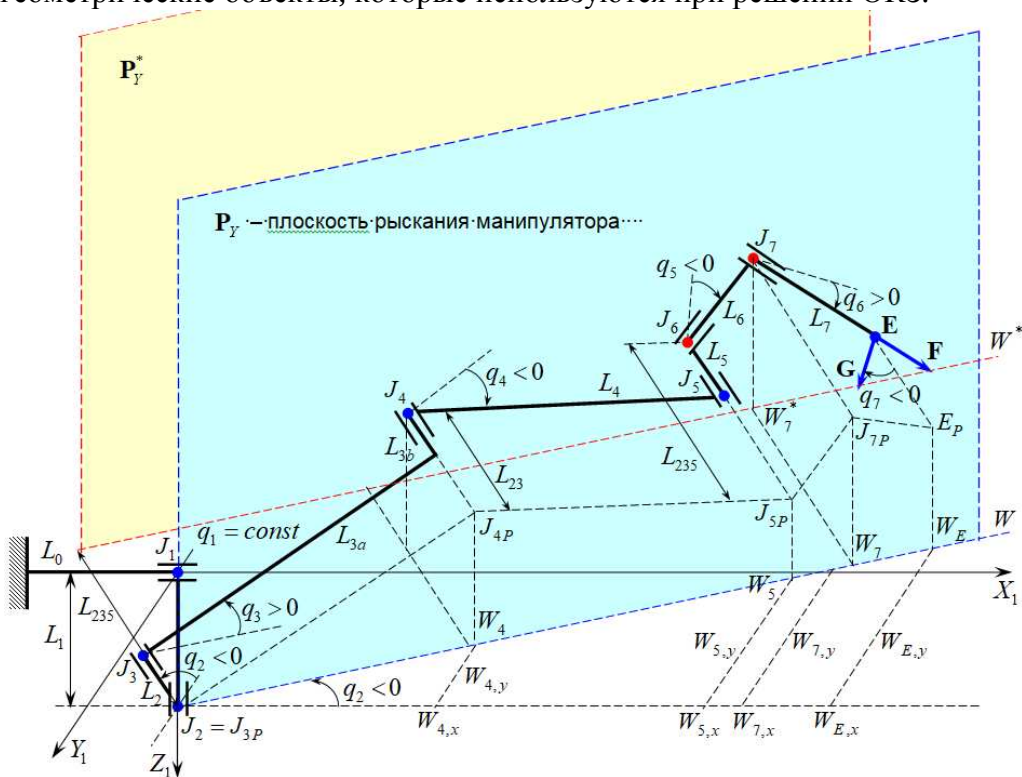


Рис. 2. Кинематическая схема исполнительного механизма манипулятора в его текущей конфигурации

Центры шарниров обозначаются точками $J_i, i = \overline{1,7}$ в СК первого шарнира. Через центр первого шарнира проходят горизонтальная плоскость $X_1J_1Y_1$ и нормальная к ней плоскость $\mathbf{P}$ рыскания манипулятора, соответствующая углу поворота во втором шарнире и пересекающая по линии W плоскость параллельную $X_1J_1Y_1$ и проходящую через центр J_2 второго шарнира. Проекция центров шарниров на плоскость $\mathbf{P}$ обозначаются точками $J_{ip}, i = \overline{3,7}$, а проекции этих точек на плоскость параллельную $X_1J_1Y_1$ — точками $W_i, i = \overline{4,7}$. Далее точки J_5, J_6, J_7 в векторно-матричных соотношениях интерпретируются как векторы $\mathbf{J}_5, \mathbf{J}_6, \mathbf{J}_7$.

Звенья 3, 4 и 6 параллельны плоскости рыскания, а звенья 2, 3а, и 5 нормальны к ней. Константы $L_{23} = L_2 + L_{3b}$ и $L_{235} = L_2 + L_{3b} + L_5$ обозначают расстояния до плоскости рыскания от центров 4-го и 5-го шарниров и от центров 6-го и 7-го шарниров и соответственно.

Плоскость $\mathbf{P}_Y^*$, параллельная плоскости $\mathbf{P}_Y$, содержит звено 6 манипулятора, то есть центры 6-го и 7-го шарниров (на рисунке 2 отмечены

красным цветом). Она отстоит от $\mathbf{P}_Y$ на расстояние L_{235} и пересекает плоскость параллельную $X_1J_1Y_1$ по линии W^* . Плоскость $\mathbf{P}_Y$ проходит через ось второго звена, поэтому при вращении во втором шарнире $\mathbf{P}_Y^*$ всегда является касательной к окружности радиуса L_{235} с центром в точке J_2 , лежащей в плоскости параллельной $X_1J_1Y_1$.

Исходными данными для решения обратной кинематической задачи (ОКЗ) манипулятора по положению являются выраженные в СК $X_1J_1Z_1$ первого шарнира при фиксированном значении q_1 вектор $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]^T$ положения центра ЗУМ и единичные векторы $\mathbf{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$ и $\mathbf{G} = [G_x, G_y, G_z]^T$, задающие его ориентацию.

2. Определение обобщенных координат манипулятора по заданному положению захватного устройства. На каждом этапе решения ОКЗ по положению вместе с исходными данными постепенно учитываются особенности кинематической схемы манипулятора. Седьмое звено вращается вокруг своей продольной оси, что позволяет вычислить координаты центра седьмого шарнира $\mathbf{J}_7 = [J_{7,x}, J_{7,y}, J_{7,z}]^T$ в СК первого

$$J_{7,x} = E_x - L_7 \mathbf{F}_x, \quad J_{7,y} = E_y - L_7 \mathbf{F}_y, \quad J_{7,z} = E_z - L_7 \mathbf{F}_z.$$

Определение угла поворота во втором шарнире. Проекцией J_7 на плоскость параллельную $X_1Y_1Z_1$ является точка $W_7^* = [J_{7,x}, J_{7,y}, 0]$. Проходящая через нее плоскость $\mathbf{P}_Y^*$ касается окружности радиуса L_{235} с центром в точке J_2 . Угол q_2 поворота $\mathbf{P}_Y^*$, во втором шарнире может быть определен как сумма как сумма двух углов – направляющего угла φ_{2w7} отрезка $O_1W_7^*$ и корректирующего угла $\Delta\varphi_2$ между этим отрезком и касательной к окружности, проходящей через точку W_7^* .

Если W_7^* находится за пределами окружности радиуса L_{235} , то из нее к этой окружности могут быть проведены две касательных, если W_7^* лежит на окружности, то касательная только одна (см. рис. 3). Если для расстояния $d_{w7} = \sqrt{J_{7,x}^2 + J_{7,y}^2}$ от оси Z_1 до W_7^* выполняется условие $d_{w7} < L_{235} - \varepsilon_{L235}$, где ε_{L235} – допустимая погрешность, то W_7^* лежит внутри окружности и задача не имеет решения.

Если $d_{w7} \geq L_{235}$, то для нахождения угла φ_{2w7} сначала вычисляются единичный вектор $\mathbf{e}_{OW7} = [J_{7,x}, J_{7,y}]^T / d_{w7}$ отрезка $O_1W_7^*$ и единичный вектор $\mathbf{e}_{7X} = \text{sign}(J_{7,x})[1, 0]^T$ отрезка $J_1J_{7,x}$. При этом используется вспомогательный угол φ_2 , косинус которого равен $\cos \varphi_2 = \mathbf{e}_{7X}^T \mathbf{e}_{OW7}$.

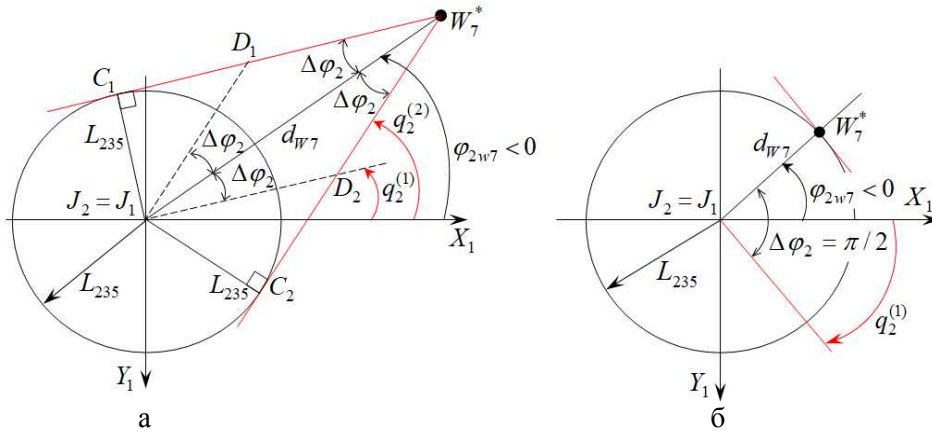


Рис. 3. Касательные из точки W_7^* к окружности радиуса L_{235} :

а) $d_{W7} > L_{235}$; б) $d_{W7} = L_{235}$

При численной реализации скалярного произведения этих векторов результат может быть больше 1.0. Для корректного вычисления угла φ_2 используется параметр $\varepsilon_{сф}$ допустимой погрешности и соотношения

$$\begin{aligned} |c_{\varphi_2}| > 1.0 + \varepsilon_{сф} &\rightarrow \text{нет решения,} \\ |c_{\varphi_2}| < 1.0 - \varepsilon_{сф} &\rightarrow \varphi_2 = \arccos c_{\varphi_2}, \\ |c_{\varphi_2} - 1.0| < \varepsilon_{сф} &\rightarrow \varphi_2 = 0, \\ |c_{\varphi_2} + 1.0| < \varepsilon_{сф} &\rightarrow \varphi_2 = \pi. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Определение угла φ_{2w7} с использованием φ_2 отражает схема на рисунке 4, в соответствии с которой

$$\begin{aligned} J_{7,x} \geq 0 &\rightarrow \varphi_{2w7} = \text{sign}(J_{7,y})\varphi_2, \\ J_{7,x} < 0 &\rightarrow \varphi_{2w7} = \text{sign}(J_{7,y})(\pi - \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для получения различных значений углов, соответствующих различным знакам $J_{7,x}$, полагается, что $\text{sign}(J_{7,y}) = 1$ при $J_{7,y} = 0$.

Одно и то же положение проекции W_7^* в СК первого шарнира может быть обеспечено при повороте плоскости рыскания (повороте во втором шарнире) в двух противоположных направлениях. Неопределенность выбора одного из них преодолевается по аналогии с [4] введением параметра, фиксирующего одну из возможных ветвей решения ОКЗ. Он принимает значения $i_{sq2} = \pm 1$ в зависимости от предполагаемого направления вращения во втором шарнире. При $i_{sq2} = +1$ угол φ_{2w7} определяется соотношениями (2.2), а при $i_{sq2} = -1$ он равен $\varphi_{2w7} = \varphi_{2w7} + \pi$. После этого он приводится к диапазону $[-\pi, \pi]$, то есть $\varphi_{2w7} > \pi \rightarrow \varphi_{2w7} = \varphi_{2w7} - 2\pi$.

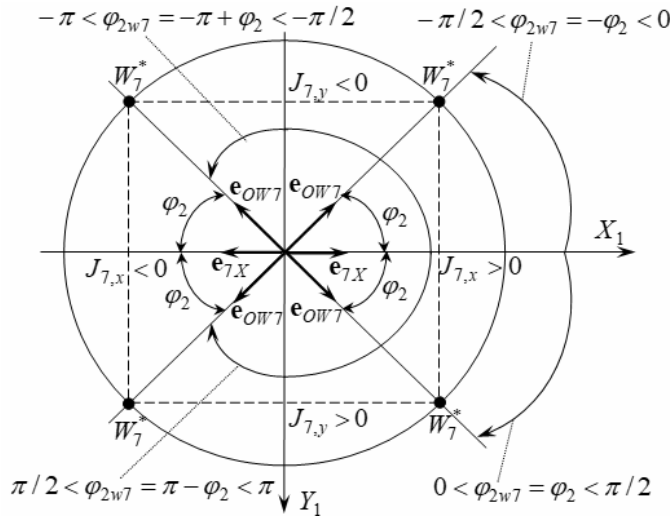


Рис. 4. Схема определения угла φ_{2w7}

Для определения корректирующего угла $\Delta\varphi_2$ используются уже известные величины L_{235} и d_{w7} . Условие $\sin\Delta\varphi_2 = L_{235}/d_{w7} = 1$, соответствующее нахождению W_7^* точно на окружности радиуса L_{235} (рис. 3б), может не выполняться из-за дискретности задания исходных данных для решения ОКЗ. Поэтому при $\sin\Delta\varphi_2 > 1.0 - \varepsilon_{\Delta\varphi_2}$, где $\varepsilon_{\Delta\varphi_2}$ – допустимая точность определения нахождению W_7^* на границе окружности, принимается, что в этой точке существует только одна касательная ($N_T = 1$) и $\Delta\varphi_2 = \pi/2$. В противном случае их будет две ($N_T = 2$) и $\Delta\varphi_2 = \arcsin(L_{235}/d_{w7})$. Дальнейшее решение ОКЗ производится для каждой касательной отдельно (в цикле с параметром $i = \overline{1, N_T}$). При $N_T = 1$ $q_2 = \varphi_{2w7} + \pi/2$, в противном случае $\Delta\varphi_2 = \arcsin(L_{235}/d_{w7})$ и $q_2^{(1)} = \varphi_{2w7} - \Delta\varphi_2$, $q_2^{(2)} = \varphi_{2w7} + \Delta\varphi_2$.

Угол q_2 также приводится к диапазону $[-\pi, \pi]$, то есть $q_2 > \pi \rightarrow q_2 = q_2 - 2\pi$, $q_2 < -\pi \rightarrow q_2 = q_2 + 2\pi$. Он позволяет определить используемые в дальнейшем и выраженные в СК первого шарнира единичный направляющий вектор $\mathbf{n}_W = [n_{W,x}, n_{W,y}, n_{W,z}]^T = [sq_2, -cq_2, 0]^T$ параллельных плоскостей $\mathbf{P}_Y$ и $\mathbf{P}_Y^*$, а также единичный направляющий вектор $\mathbf{e}_{7,W} = [cq_2, sq_2, 0]^T$ параллельных линий W и W^* , направленный в точку W_7^* на линии W^* , ($\mathbf{n}_W^T \mathbf{e}_{7,W} = 0$).

Определение угла поворота в шестом шарнире. В исходном положении манипулятора вектор $\mathbf{F}$ (ось ЗУМ) расположен в плоскости $\mathbf{P}_Y^*$. Отклонение $\mathbf{F}$ от $\mathbf{P}_Y^*$ происходит при вращении 6-го звена относительно своей оси,

которая принадлежит $\mathbf{P}_Y^*$. Поэтому вектор $\mathbf{e}_{76}$ этой оси (из J_7 в J_6) определяется векторным произведением

$$\mathbf{e}_{76} = \mathbf{n}_W \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -cq_2 \\ 0 & 0 & -sq_2 \\ cq_2 & sq_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cq_2 F_z \\ -sq_2 F_z \\ cq_2 F_x + sq_2 F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{76,x} \\ e_{76,y} \\ e_{76,z} \end{bmatrix}.$$

Модуль этого вектора равен $|\mathbf{e}_{76}| = |\mathbf{n}_W| |\mathbf{F}| \sin(\angle \mathbf{F}, \mathbf{n}_W)$, если $\mathbf{n}_W$ и $\mathbf{F}$ параллельны (угол $\angle \mathbf{F}, \mathbf{n}_W = 0^\circ \pm \pi$), то $|\mathbf{e}_{76}| = 0$. В этом случае однозначно определить положение центра J_6 шестого шарнира по ранее определенным координатам J_7 невозможно. Преодолеть эту сингулярность можно заданием извне вектора $\mathbf{e}_{76}$ в СК первого шарнира

$$\mathbf{e}_{76} = \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\alpha}_{345}^T \mathbf{e}_{76}^{(6)} = \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 \\ sq_2 & cq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cq_{345} & 0 & sq_{345} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sq_{345} & 0 & cq_{345} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cq_2 sq_{345} \\ sq_2 sq_{345} \\ cq_{345} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{e}_{76}^{(6)}$ – единичный вектор звена 6 в его входной СК; $q_{345} = q_3^* + q_4^* + q_5^*$ – сумма углов в третьем – пятом шарнирах, задаваемая по какому-либо критерию при планировании траектории.

В программе решения ОКЗ реализуются две возможности – выявление сингулярности при $|\mathbf{e}_{76}| < \varepsilon_{sng}$, где ε_{sng} – порог чувствительности, и ее преодоление заданием значений sq_{345} , cq_{345} .

При отсутствии сингулярности единичный вектор звена 6 из J_7 в J_6 равен $\mathbf{e}_{76} = \mathbf{e}_{76} / |\mathbf{e}_{76}|$.

Угол q_6 поворота в шестом шарнире – это угол между вектором $\mathbf{F}$ оси ЗУМ (отрезком прямой между J_7 и $\mathbf{E}$) и его проекцией на плоскость $\mathbf{P}_Y^*$. Так как J_7 принадлежит $\mathbf{P}_Y^*$, то определяется проекция на эту плоскость точки $\mathbf{E}$. Длина проекции $\mathbf{E}$ на линию W^* равна $d_{EW} = \mathbf{E}^T \mathbf{e}_{7,W} = E_x cq_2 + E_y sq_2$. С учетом этого вектор проекции $\mathbf{E}$ на плоскость $\mathbf{P}_Y^*$, выраженный в СК первого звена, равен

$$\mathbf{E}_W = d_{EW} \mathbf{e}_{7,W} + L_{235} \mathbf{n}_W + [0, 0, E_z]^T = [E_{W,x}, E_{W,y}, E_z]^T = \begin{bmatrix} d_{EW} cq_2 + sq_2 L_{235} \\ d_{EW} sq_2 - cq_2 L_{235} \\ E_z \end{bmatrix}.$$

Один и тот же вектор $\mathbf{F}_W = \mathbf{E}_W - \mathbf{J}_7$ проекции оси ЗУМ на плоскость $\mathbf{P}_Y^*$, может быть получен при различных по знаку углах q_6 поворота в шестом шарнире. Неопределенность учитывается с помощью задаваемого извне параметра $i_{sq6} = \pm 1$, который определяет направление единичного вектора

$\mathbf{e}_{FW} = i_{sq6} \mathbf{F}_W / |\mathbf{F}_W|$ этой проекции. Если $|\mathbf{F}_W| < \varepsilon_{sng}$, то имеет место сингулярность и $\mathbf{e}_{FW} = \mathbf{0}$. Косинус угла φ_6 между $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_{FW}$ равен $c_{\varphi,6} = \mathbf{F}^T \mathbf{e}_{FW}$, а сам угол вычисляется аналогично (2.1). Угол q_6 поворота в шестом шарнире с учетом знака определяется направлением векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{n}_W$ как $q_6 = \text{sign}(\mathbf{F}^T \mathbf{n}_W) \varphi_6$.

Определение угла поворота в четвертом шарнире. Векторы $\mathbf{e}_{76}$, $\mathbf{n}_W$ и точка J_7 позволяют определить координаты центров пятого и шестого шарниров $\mathbf{J}_6 = \mathbf{J}_7 - L_6 \mathbf{e}_{76} = [J_{6,x}, J_{6,y}, J_{6,z}]^T$, $\mathbf{J}_5 = \mathbf{J}_6 - L_5 \mathbf{n}_W = [J_{5,x}, J_{5,y}, J_{5,z}]^T$ в СК первого шарнира. Углы q_3, q_4, q_5 образуются между звеньями 3, 4 и 6, параллельными плоскости рыскания $\mathbf{P}_Y$. Длины L_{3a} и L_4 звеньев 3 и 4 – это их проекции на эту плоскость. Поэтому сначала определяется проекция на $\mathbf{P}_Y$ центра пятого шарнира $\mathbf{J}_{5P} = \mathbf{J}_5 - L_{23} \mathbf{n}_W = [J_{5P,x}, J_{5P,y}, J_{5P,z}]^T$ и далее рассматривается треугольник $J_{3P} J_{4P} J_{5P}$ (см. рис. 2). Длина его стороны $J_{3P} J_{5P}$ равна $d_{35,P} = \sqrt{J_{5P,x}^2 + J_{5P,y}^2 + (J_{5P,z} - L_1)^2}$. По теореме косинусов, примененной к этому треугольнику, косинус угла φ_{34} равен $c\varphi_{34} = \cos \varphi_{34} = (L_{3a}^2 + L_4^2 - d_{35,P}^2) / 2L_{3a}L_4$. Корректное вычисление φ_{34} выполняется аналогично (2.1). При этом, если $|c\varphi_{34}| > 1.0 + \varepsilon_{c\varphi}$, то при текущих заданных параметрах i_{sq2} и i_{sq6} решение ОКЗ отсутствует, то есть треугольник $J_{3P} J_{4P} J_{5P}$ не «собирается».

В четвертом шарнире угол q_4 определяется как $\pi - \varphi_{34}$ между продолжением звена 3 и звеном 4. В зависимости от взаимного положения этих звеньев в СК первого шарнира он может менять знак. Геометрический анализ этих взаимных положений, который здесь не приводится, позволяет устранить неопределенность решения с помощью задаваемого извне параметра $i_{sq4} = \pm 1$. В результате $q_4 = i_{sq4}(\pi - \varphi_{34})$.

Определение угла поворота в третьем шарнире. С учетом начальной конфигурации манипулятора угол q_3 в третьем шарнире определяет поворот звена 3 относительно линии W пересечения плоскостей $\mathbf{P}_Y$ и $X_1O_1Y_1$. На данном этапе решения в треугольнике $J_{3P} J_{4P} J_{5P}$ не известны координаты вершины J_{4P} . Поэтому q_3 складывается из двух углов. Первый – это угол q_{3a} между линией W и стороной $J_{3P} J_{5P}$ с известными координатами вершин, а второй – угол q_{3b} между сторонами $J_{3P} J_{5P}$ и $J_{3P} J_{4P}$, определяемый их известными длинами.

В произвольной конфигурации манипулятора центры шарниров могут располагаться по разные стороны от оси Z_1 . Поэтому с учетом того, что

$W_5 = W_6$, величина угла q_{3a} зависит от относительной ориентации на линии W отрезков J_1W_5 и J_1W_7 . Направление отрезка J_2W_7 в СК первого шарнира задается вектором $\mathbf{e}_{7,W}$. Относительно него направление отрезка J_2W_5 можно описать параметром $s_{57,W} = \text{sign}(J_{5P,x}cq_2 + J_{5P,y}sq_2)$. Для определения q_{3a} необходимо сначала определить расстояние со знаком $d_{35,z} = L_1 - J_{5P,z}$ вдоль оси Z_1 от точки $J_{3P} = J_2$ до точки J_{5P} и положительное расстояние $d_{15P} = \sqrt{J_{5P,x}^2 + J_{5P,y}^2}$ от оси Z_1 до J_{5P} вдоль линии W . Проекция звеньев на плоскость $\mathbf{P}_Y$ при $d_{35,z} > 0$ показаны на рисунке 5. При $d_{35,z} < 0$ они получаются аналогично.

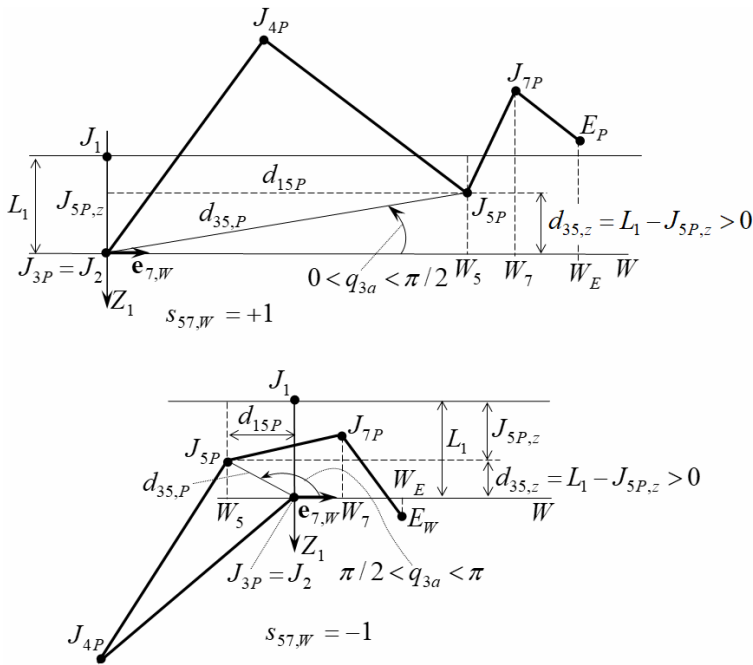


Рис. 5. Проекция звеньев на плоскость $\mathbf{P}_Y$

Из рисунка 5 видно, что угол q_{3a} определяется с помощью прямоугольного треугольника $J_{3P}J_{5P}W_5$ и функции арктангенса

$$q_{3a} = -\arctg(s_{57,P}d_{15P}/d_{35,z}) + \text{sign}(d_{35,z})\pi/2.$$

В вырожденном случае, если $|d_{35,z}| < \epsilon_{d35z}$, где ϵ_{d35z} – допустимая погрешность, то $q_{3a} = 0$ при $s_{57,W} > 0$ и $q_{3a} = \pi$ при $s_{57,W} < 0$.

Для определения угла q_{3b} при вершине J_{3P} в треугольнике $J_{3P}J_{4P}J_{5P}$ общего вида используется теорема косинусов $sq_{3b} = (L_{3a}^2 + d_{35,P}^2 - L_4^2)/2L_{3a}d_{35,P}$ и соотношение (2.1). Знак этого угла связан со знаком угла q_4 , что видно из рисунка 6 при $s_{57,W} = +1$ (для $s_{57,W} = -1$ геометрические построения

выполняются аналогично). В результате угол в третьем шарнире равен $q_3 = q_{3a} - i_{sq4} q_{3b}$.

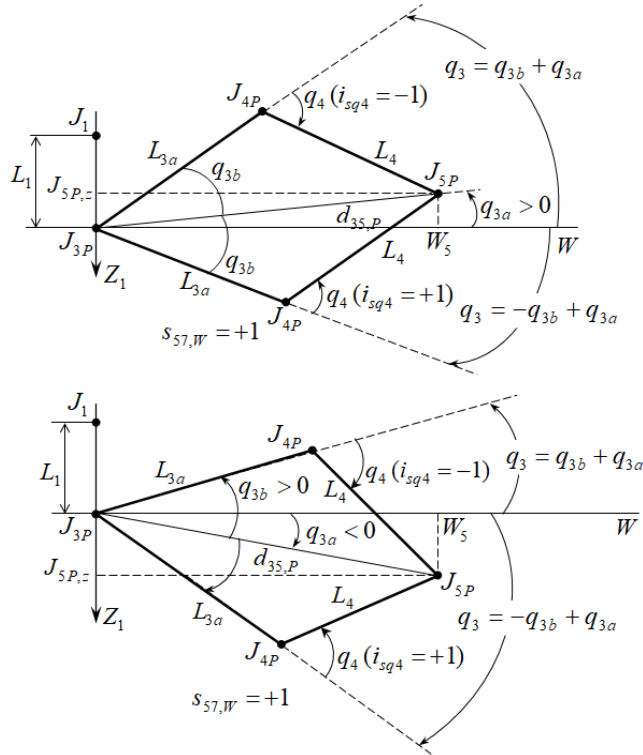


Рис. 6. К определению знака угла q_{3b}

Определение угла поворота в пятом шарнире. Угол поворота q_5 в пятом шарнире задает вращение в плоскости $\mathbf{P}_Y^*$ единичного вектора $\mathbf{e}_6 = -\mathbf{e}_{76}$ шестого звена (из J_6 в J_7) относительно единичного вектора $\mathbf{e}_6^{(0)}$ этого же звена в исходном положении манипулятора (при $q_5 = 0$). Знак угла зависит от проекции $\mathbf{e}_6$ на единичный вектор $\mathbf{e}_4$ четвертого звена, которое параллельно $\mathbf{P}_Y^*$ (см. рис. 7).

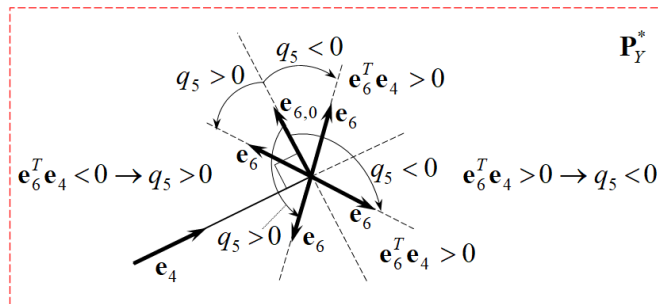


Рис. 7. Векторы $\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_6^{(0)}$ и $\mathbf{e}_4$ в плоскости $\mathbf{P}_Y^*$

На этом этапе решения известны углы q_2, q_3, q_4 , что позволяет вычислить единичные векторы $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_6^{(0)}$ (при $q_5 = 0$) в СК первого шарнира

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_{34}^T [1, 0, 0]^T = \begin{bmatrix} cq_2 - sq_2 & 0 \\ sq_2 & cq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cq_{34} & 0 & sq_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sq_{34} & 0 & cq_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{4,x} \\ e_{4,y} \\ e_{4,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cq_2 cq_{34} \\ sq_2 cq_{34} \\ -sq_{34} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_6^{(0)} = \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_{34}^T [0, 0, -1]^T = \begin{bmatrix} cq_2 - sq_2 & 0 \\ sq_2 & cq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cq_{34} & 0 & sq_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ -sq_{34} & 0 & cq_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{60,x} \\ e_{60,y} \\ e_{60,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cq_2 sq_{34} \\ -sq_2 sq_{34} \\ -cq_{34} \end{bmatrix}.$$

Косинус вспомогательного угла φ_5 определяется как $c\varphi_5 = \mathbf{e}_6^{(0)T} \mathbf{e}_6^{(0)}$, а значение φ_5 вычисляется аналогично (2.1). Окончательно угол поворота в пятом шарнире равен $q_5 = -\text{sign}(\mathbf{e}_6^T \mathbf{e}_4) \varphi_5$.

Определение угла поворота в седьмом шарнире. В исходном положении манипулятора вектор $\mathbf{G}$, задающий ориентацию ЗУМ, совпадает с введенным ранее в рассмотрение единичным вектором $\mathbf{e}_{76}$ шестого звена (из J_7 в J_6). Косинус вспомогательного угла φ_7 между вектором $\mathbf{G}$, заданным в исходных данных, и вектором $\mathbf{e}_{76}$ вычисляется как скалярное произведение векторов $c\varphi_7 = \mathbf{G}^T \mathbf{e}_{76}$ (см. рис. 8).

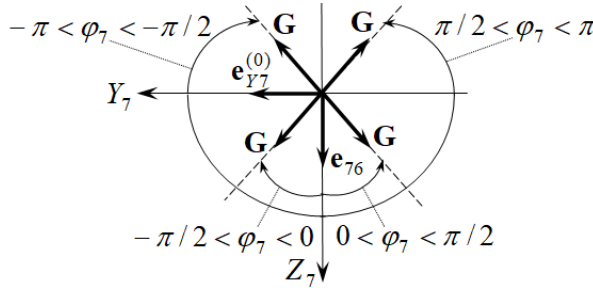


Рис. 8. Вид на векторы $\mathbf{e}_{76}$ и $\mathbf{G}$ с конца ЗУМ

Вектор $\mathbf{e}_{76}$ определяется соотношением (2.3), в котором q_{345} есть сумма углов $q_3 - q_5$, полученных на предшествующих этапах решения. Значение φ_7 вычисляется аналогично (2.1).

Знак угла поворота в седьмом шарнире зависит от взаимной ориентации $\mathbf{G}$ и единичного вектора $\mathbf{e}_{Y7}^{(0)}$ оси $+Y_7$ при условии $\varphi_7 = 0$. Последний можно вычислить по уже известным углам $q_2 - q_6$

$$\mathbf{e}_{Y7}^{(0)} = \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_{345}^T \mathbf{a}_6^T [0, 1, 0]^T = \begin{bmatrix} -cq_2 cq_{345} sq_6 - sq_2 cq_6 \\ -sq_2 cq_{345} sq_6 + cq_2 cq_6 \\ sq_{345} sq_6 \end{bmatrix}.$$

Знак скалярного произведения векторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{e}_{Y7}^{(0)}$ окончательно определяет угол поворота в седьмом шарнире $q_7 = -\text{sign}(\mathbf{G}^T \mathbf{e}_{Y7}^{(0)}) \varphi_7$.

Процесс определения набора углов $q_2 - q_7$ для очередной касательной может не завершиться, если не выполняются геометрические условия. Но и полученный набор может не быть решением ОКЗ, если вычисленные по нему векторы $\mathbf{E}_{\text{ОКЗ}}, \mathbf{F}_{\text{ОКЗ}}, \mathbf{G}_{\text{ОКЗ}}$ положения и ориентации ЗУМ не соответствуют заданным исходным данным $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$. Решение является приемлемым при одновременном выполнении условий $|\mathbf{F}^T \mathbf{F}_{\text{ОКЗ}} - 1.0| < \varepsilon_F$, $|\mathbf{G}^T \mathbf{G}_{\text{ОКЗ}} - 1.0| < \varepsilon_G$, $|\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{ОКЗ}}| / |\mathbf{E}| < \varepsilon_E$, где $\varepsilon_F, \varepsilon_G, \varepsilon_E$ – задаваемые параметры точности решения.

Три параметра $i_{sq2}, i_{sq6}, i_{sq4}$, учитывающие возможность вращения в противоположных направлениях во втором, шестом и четвертом шарнирах, определяют дерево возможных решений ОКЗ, ветви которого имеют номера $n_{brch} = \overline{1, 8}$ (см. рис. 9).

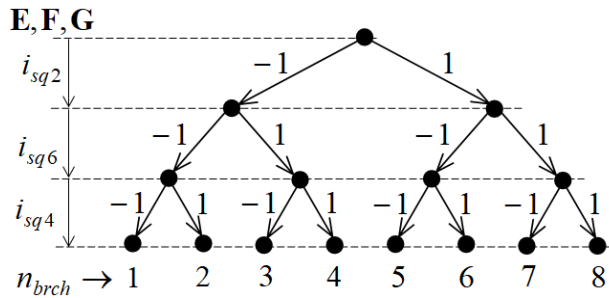


Рис. 9. Дерево возможных решений ОКЗ

Каждая ветвь может иметь (без учета сингулярности) не более одного решения. Если оно получено для первой касательной, то вторая не рассматривается.

При планировании траектории угол q_1 в первом шарнире может принимать различные, а при перемещении в ограниченной рабочей зоне обычно единственное значение. Для каждого из них выполняется решение ОКЗ по положению. При планировании траектории могут использоваться все ветви, при перемещении в ограниченной рабочей зоне, как правило, одна.

3. Тестирование алгоритма решения ОКЗ. С целью оценки качества получаемых решений для каждого из углов $q_2 - q_6$ экспертным способом были разработаны наборы из 6 значений в диапазоне $[-170^0, +170^0]$. Последнее седьмое звено вращается вокруг собственной оси и не оказывает влияния на конфигурацию всего механизма. Поэтому q_7 принимал фиксированное значение. Общее число наборов углов составило $6^6 = 7776$. Для каждого из них были рассчитаны векторы $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$, которые являлись исходными данными для решения ОКЗ. Анализировались все ветви возможных решений при заданных значениях параметров $\varepsilon_{L235}, \varepsilon_{c\varphi}, \varepsilon_{\Delta\varphi2}$ и ε_{sng} .

Если значения q_6 были далеки от $\pi/2$, то для каждого из 7776 наборов углов было получено от двух (126 наборов) до восьми решений (5862 набора). Для 7560 наборов получены решения, полностью совпадающие с углами, для которых были рассчитаны векторы $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$, а для всех остальных выполнялись критерии $|\mathbf{F}^T \mathbf{F}_{OK3} - 1.0| < \varepsilon_F$, $|\mathbf{G}^T \mathbf{G}_{OK3} - 1.0| < \varepsilon_G$, $|\mathbf{E} - \mathbf{E}_{OK3}|/|\mathbf{E}| < \varepsilon_E$. При неизвестных заранее углах в шарнирах все эти решения могут рассматриваться как равноценные. Наличие полностью совпадающих наборов углов указывает на то что векторы $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ в данной группе соответствуют конфигурациям манипулятора, удаленным от границ его рабочей зоны.

Если указанные наборы содержали $q_6 = 78.6^\circ$, то для 12 из них, в которых можно было построить только одну касательную к окружности радиуса L_{235} из точки W_7^* , решения отсутствовали. Такой результат можно объяснить совместным действием двух факторов, управляемых допусками $\varepsilon_{\Delta\varphi 2}$ и ε_{sng} . При использовании $q_6 = 88.6^\circ$ число ветвей, для которых отсутствовало решение, увеличилось до 30. Малые значения допусков увеличивают требования к точности, но могут привести к потере части решений.

Если программа решения ОКЗ работает в режиме выявления сингулярности, то наряду с установлением такого события для одних ветвей, она может получить решения для других. Так, например, для набора углов $q_2 = 170^\circ, q_3 = 165^\circ, q_4 = 158^\circ, q_5 = 155^\circ, q_6 = 89.4^\circ, q_7 = -144.3^\circ$ из точки W_7^* можно провести 2 касательных. Решения существуют для всех ветвей (в ветвях 1 – 4 для касательной 1, ветвь 4 – совпадающее решение; в ветвях 5 – 8 для касательной 2). Если угол в шестом шарнире увеличивается до $q_6 = 89.5^\circ$, то сингулярность выявляется во всех ветвях (касательная 1), но для ветвей 5 – 8 существует решение (касательная 2).

Для набора углов $q_2 = 0, q_3 = 30^\circ, q_4 = -30^\circ, q_5 = 0, q_6 = 90^\circ, q_7 = 30^\circ$ из точки W_7^* также можно провести 2 касательных. Для ветвей 5 – 7 ($i_{sq2} = 1$) сингулярность выявляется (для касательной 2), а для ветвей 1 – 4 ($i_{sq2} = -1$) решение существует (для касательной 1, при этом 2-я касательная не анализируется). При $q_6 = 90^\circ$ для отсутствия сингулярности необходимо уменьшить величину допуска ε_{e76} до слишком малой величины $\varepsilon_{e76} = 10^{-16}$. В режиме преодоления сингулярности для этого набора заданием sq_{345}, cq_{345} , число решений увеличивается до 8. При этом в зависимости от величины задаваемой суммы q_{345} может быть получено полностью совпадающее решение (в 7-й ветви). Таким образом, преодоление сингулярности с помощью дополнительных внешних данных позволяет увеличить число решений.

Исходя из этого, можно предположить, что при достаточном удалении от границы рабочей зоны алгоритм надежно выделяет все возможные решения. Вблизи этой границы возможна потеря решения. Вероятность этого возрастает при приближении к сингулярной конфигурации ($q_6 \rightarrow 90^\circ$).

При планировании траектории необходимо анализировать возможность использования всех полученных решений ОКЗ, которые первоначально могут рассматриваться как равноценные.

Сингулярность не преодолевается только уменьшением параметра $\varepsilon_{\text{sing}}$. Для этого необходимо использовать дополнительные внешние данные, позволяющие увеличить число возможных решений и их качество. Если при планировании траектории алгоритм сначала выполнить в режиме выявления сингулярности, то эти данные могут быть получены из решений для соседних точек. Это позволит перейти к выполнению алгоритма в режиме преодоления сингулярности.

Заключение. На основе геометрического подхода разработан вычислительно эффективный алгоритм решения обратной кинематической задачи по положению для манипулятора с кинематикой подобной SSRMS. Для каждого набора исходных данных он позволяет получить до 8 решений, которые изначально могут рассматриваться как равноценные. Их число уменьшается при приближении манипулятора к границе рабочей зоны. Решение может отсутствовать при выявлении сингулярности, которая преодолевается за счет привлечения дополнительных внешних исходных данных. Алгоритм может быть использован при планировании траектории, а также при расчете исходной конфигурации, относительно которой задаются команды наведения на малые перемещения при управлении в ограниченной рабочей зоне.

Список литературы

1. Uicke rJ.J., Jr., Denavit J., Hartenberg R.S. An Iterative Methods for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms // Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E. 1964, no. 31, pp. 309-314.
2. Кулаков Ф.М. Супервизорное управление роботами. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
3. Paul R.P., Shimano B.E., Mayer G. Kinematic Control Equations for Simple Manipulators // IEEE Transactions. Systems, Man and Cybernetics. 1981, vol. 11, no. 6, pp.449-455.
4. Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юревич Е.И. Динамика управления роботами. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
5. Lee C.S.G., Ziegler M. Geometric Approach in Solving the Inverse Kinematic of PUMA Robots // IEEE Transactions. Aerospace and Electronic Systems. 1984, vol. 20, no. 6, pp. 695-706.
6. Goldenberg A.A., Lawrence D.L. A Generalized Solution to the Inverse Kinematic of Robot Manipulators // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1985, no. 107, pp. 103-106.
7. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
8. Шахинпур М. Курс робототехники / Пер. с англ. – М.: Мир. 1990. – 527 с.

9. Sadchev S.S., Fuller B.R. The Shuttle Remote Manipulator System and its use in orbital operations // The Space congress Proceedings, 1983 (20th) Space: The Next Twenty Years [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://commons.erau.edu/space-congress-proceedings>
10. Canadarm2's data sheet [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.asc-csa.gc.ca/eng/iss/canadarm2/data-sheet.asp>.

References

1. Uicke rJ.J., Jr., Denavit J., Hartenberg R.S. An Iterative Methods for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms // Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E. 1964, no. 31, pp. 309-314.
2. Kulakov F.M. Supervisor control of robots – M.: Science, 1980. – 448 p.
3. Paul R.P., Shimano B.E., Mayer G. Kinematic Control Equations for Simple Manipulators // IEEE Transactions. Systems, Man and Cybernetics. 1981, vol. 11, no. 6, pp. 449-455.
4. Kozlov V.V., Makarichev V.P., Timoveev A.V., Yurevich E.I. Dynamic of robot control. – M.: Science, 1984. – 336 p.
5. Lee C.S.G., Ziegler M. Geometric Approach in Solving the Inverse Kinematic of PUMA Robots // IEEE Transactions. Aerospace and Electronic Systems. 1984, vol. 20, no. 6, pp. 695-706.
6. Goldenberg A.A., Lawrence D.L. A Generalized Solution to the Inverse Kinematic of Robot Manipulators // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1985, no. 107, pp. 103-106.
7. Fu K.S., Gonzales R.C., Lee C.S. Robotics / Transl. from English. – M.: World, 1989. – 624 p.
8. Shahipoor M. Course on robotics / Transl. from English. – M.: World, 1990. – 527 p.
9. Sadchev S.S., Fuller B.R. The Shuttle Remote Manipulator System and its use in orbital operations // The Space congress Proceedings, 1983 (20th) Space: The Next Twenty Years [Electronic resource]. – Access mode: <http://commons.erau.edu/space-congress-proceedings>
10. Canadarm2's data sheet [Electronic resource]. – Access mode: <https://www.asc-csa.gc.c/eng/iss/canadarm2/data-sheet.asp>.

Яскевич Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, эксперт по динамике электромеханических систем andrey.yaskevich@rsce.ru	Yaskevich Andrey Vladimirovch – doctor of physic-mathematical sciences, expert on electro-mechanical systems dynamics
--	--

Received 14.04.2025