

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА, КОНСТРУИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЙ

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.², Майстришин М.М.¹

¹*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, Севастополь, Россия*

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, принцип максимума Понтрягина, канонические уравнения, задача о быстродействии, релейное управление, энергоёмкость, реверсионное конструирование управлений.

Аннотация. Кратко отражена диалектическая связь принципов Гамильтона и Понтрягина, показан вывод канонических уравнений Гамильтона с использованием уравнений Лагранжа второго рода для консервативной системы, отражено появление сопряженных уравнений при синтезе оптимальных управлений. На элементарном примере задачи о максимальном быстродействии оценена энергоёмкость управления с возможностью ее сравнения с другими типами управления, полученными, например, в результате реверсионного конструирования. Кратко освещена идея конструирования управлений, позволяющих экономить энергию при достижении цели движения.

CANONICAL EQUATIONS OF CLASSICAL MECHANICS AND THE MAXIMUM PRINCIPLE, DESIGN OF CONTROLS

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.², Maystrishin M.M.¹

¹*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;*

²*Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia*

Keywords: Lagrange equation, Hamilton equation, Pontryagin maximum principle, canonical equations, problem of speed, relay control, energy intensity.

Abstract. The dialectical connection of the Hamilton and Pontryagin principles is briefly reflected, the derivation of the canonical Hamilton equations using the Lagrange equation of the second kind for a conservative system, the emergence of adjoint equations under optimal control are shown. Using an elementary example of the problem of maximum speed, the energy intensity of control is estimated and compared with other types of control, obtained as a result of reversal construction. The idea of designing controls that allow saving energy when achieving the goal of movement is briefly covered.

Введение

Мотивом к постановке задачи, стимулирующим приоритетом может быть прежде всего цель управления, которая затем предполагает оптимизацию средств ее достижения – при этом впереди шествует фантазия моделирования. Если даже выбор критерия оптимальности вызывает определенные трудности, то это не должно останавливать поиск решения задач о достижении необходимой цели различными средствами.

Безусловно, что для успешного моделирования оптимальных движений необходимо знание предыстории появления эффективных методов синтеза управлений, их связи с родственными научными дисциплинами.

Методам теории оптимального управления движением объектов посвящены труды [1-4] и другие. Весьма стимулирующим мотивом к применению методов является их глубокая физико-математическая сущность, строгость обоснования основных идей и положений. Не случайно, например, изложение принципа максимума Л.С. Понтрягина часто начинается с утверждения, что существование ненулевого решения системы сопряженных уравнений соответствует достижению максимума Гамильтониана. Поэтому принцип максимума является естественным продолжением аналитической механики [5-7] и отражает известный прогресс в моделировании оптимально управляемого движения объектов техники.

Цель исследований – показать взаимосвязь принципов Гамильтона и Понтрягина, получить канонические уравнения Гамильтона с использованием уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы, привести примеры конструирования управлений, позволяющих экономить энергию при достижении цели движения.

1. История появления принципа максимума Л.С. Понтрягина

Уравнения в форме Коши в векторном виде позволяют их записать лаконично

$$\dot{q} = f, \quad (1)$$

где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ – обобщенная скорость, $f = f(x, u, t)$ – правые части уравнений (x – физические координаты, u – управление, t – время).

В случае консервативной системы уравнения Лагранжа второго рода (здесь без индексов)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (2)$$

где T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия.

При использовании функции Лагранжа $L = T - \Pi$ или $T = L + \Pi$ уравнения (2) преобразуются к виду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (3)$$

С вводом новой канонически сопряженной вспомогательной функции $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \psi$ для (3) следует:

$$\frac{\partial \psi}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \text{ или } \dot{\psi} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (4)$$

Из функций Гамильтона $H = T + \Pi$ и Лагранжа $L = T - \Pi$ получена зависимость:

$$L + H = 2T. \quad (5)$$

Производная от (5) по обобщенной координате (с учетом $\frac{\partial(2T)}{\partial q} = 0$) равна

$$\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \text{ или } \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}. \quad (6)$$

Примечание. В классической механике при получении канонических уравнений Гамильтона используется выражение для функции H в канонических переменных [7]. Известные преобразования для консервативной системы здесь опускаются [6-8].

Дальше осуществляется непосредственный переход к принципу максимума Л.С. Понтрягина.

С учетом (4) и (6) запишем

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (8)$$

Функция Гамильтона (кинетический потенциал) в управляемом движении, как известно, кратко может быть представлена так:

$$H = \psi \dot{q}. \quad (9)$$

С учетом (1) уравнение (9) переписывается следующим образом:

$$H = \psi f \quad (10)$$

Теперь уравнение (10) с учетом (8) принимает следующий известный вид:

$$\dot{\psi} = -\psi \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (11)$$

Далее на основании (9) и (11) уравнения Гамильтона

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \psi}. \quad (12)$$

В ряде публикаций при изложении принципа максимума Л.С. Понтрягина, прежде всего, обращено внимание на уравнения (11) с представлением в векторном либо скалярном виде.

Например, также указано, что функция H является мощностью, а функции ψ – импульсами.

В публикации Р.В. Гамкредидзе [2] по поводу появления принципа максимума сказано: «Простые соображения двойственности привели к рассмотрению следующего сопряженного уравнения относительно «вспомогательной» переменной» ковектора ψ :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi \frac{\partial f}{\partial x}(x, u). \quad (13)$$

Необходимым условием оптимальности управляемого движения является:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (14)$$

Пример. За кратчайшее время переместить объект на заданное расстояние из исходного покоя в новое состояние покоя ($x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, $x(T)=L$, $\dot{x}(T)=0$) при ограничении на управление $-1 \leq U(t) \leq 1$. Найти: время T управляемого движения. Уравнения в форме Коши

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U. \quad (15)$$

В этом случае Гамильтониан и сопряженные уравнения

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \quad (16)$$

Решение

$$\psi_1 = D_1; \quad \psi_2 = D_2 - D_1 f. \quad (17)$$

Из (17) следует, что управление имеет одно переключение, т.е. его можно записать (рис. 1) так: $U(t) = 1 \sin \psi_2(t)$.

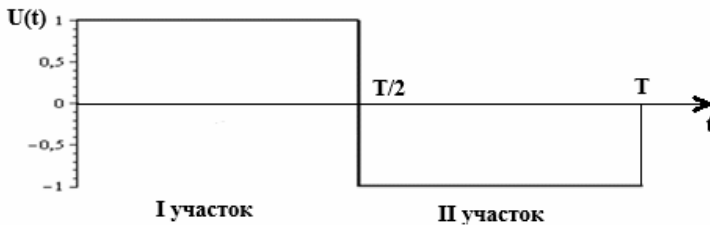


Рис. 1. Управление с одним переключением

На первом участке движения

$$\ddot{x} = U = 1. \quad (18)$$

Теперь при $\dot{x} = t$, $x = \frac{t^2}{2}$, а при $t = t_1 = \frac{T}{2}$ получим $\frac{L}{2} = \frac{T^2}{8}$; $T = 2\sqrt{L}$ (рис. 2).

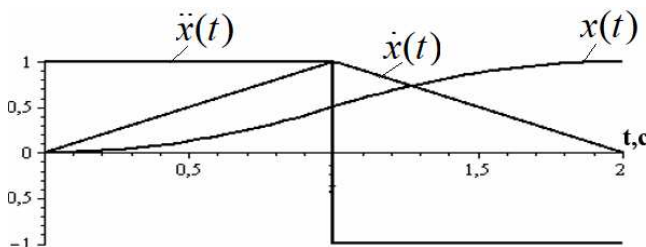


Рис. 2. Управление $\ddot{x}(t)$, скорость $\dot{x}(t)$ и перемещение $x(t)$ при $T = 2$ с

2. О конструировании управлений

В классической механике обратная задача (первая задача динамики) при задании уравнений движения предполагает нахождение сил (причин) и, в конечном счете, не исключает восстановление функционала-критерия, отражающего экстремальное свойство истинного движения.

В случае задания расстояния и времени движения релейное управление является более энергоемким по сравнению с классическим управлением, полученным вариационным методом теории оптимального управления (с заданным квадратичным критерием оптимальности и краевыми условиями, задача Лагранжа [14-21]).

При конструировании оптимальных управлений типа разгон-торможение аналитические зависимости для ускорения и скорости переносного поступательного движения ранее были найдены в виде [20-21]:

$$U_n = \frac{L}{T^2} (2n+4) \left(\frac{T-2t}{T} \right)^n, \quad V_n = \frac{L(n+2)}{T(n+1)} \left(1 - \left(\frac{T-2t}{T} \right)^{n+1} \right),$$

где L – общее перемещение, T – задаваемое общее время переносного движения, n – степень полинома (нечетная). Если в случае классического управления ($n = 1$) затрачиваемая на реализацию движения энергия (при $m = 1$ кг):

$$E_1 = 2 \int_0^{T/2} U_1 V_1 dt = \frac{2,25L^2}{T^2},$$

то для конструируемого управления при $n = 3$ энергия $E_3 = \frac{1,5625L^2}{T^2}$.

Увеличение степени полинома приводит к возрастанию удаления избыточной энергии для достижения цели оптимального переносного движения. Конструирование управления позволяет выявить новые критерии оптимальности, с помощью которых можно решать прямые задачи минимизации.

Реверсионное конструирование, то есть решение полной обратной задачи вариационного исчисления, предполагает путь преобразования от исходной аналитической функции ускорения или перемещения (с учетом краевых и дополнительных условий) к уравнению Эйлера, и в конечном счете к функционалу-критерию, но без предварительного задания критерия оптимальности, что приводило не только к естественному достижению поставленной цели движения, но и к существенной экономии энергии для ее достижения [14-21].

Заключение

1. В статье сосредоточено внимание на сущности принципа максимума, его естественной связи с классической механикой. Алгоритм применения принципа максимума иллюстрируется на простом примере.

2. Канонические уравнения аналитической механики в соответствии с принципом Гамильтона–Остроградского отражают действительное движение механической системы и обусловлены существованием естественных управляющих воздействий. В этом случае вводимые сопряжённые функции непосредственно отражают действительный характер движения.

3. Как показано в ряде исследований, использование алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления (реверсионного исчисления) в задачах типа разгон-торможение позволяет получить менее энергоемкие управления по сравнению с известными результатами решения задач классическими вариационными методами теории оптимального управления.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
2. Гамкрелидзе Р.В. Открытие принципа максимума Понтрягина. – Laboratoire des Sciences des Information, 2013. – 12 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
4. Абдулаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1985. – 496 с.
6. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 264 с.
7. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
9. Теория автоматического управления. Ч. II. Теория нелинейных специальных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1997. – 288 с.
10. Черноусько Ф.Л., Акуленко П.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
11. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.П. Оптимальное управление движением механических систем. – К.: УМК ВО, 1988. – 235 с.
12. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
13. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
14. Бохонский А.И. Управление переносным движением упругих систем / А.И. Бохонский // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 56-63.
15. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Оптимальное переносное движение упругих объектов // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 3-10.
16. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.
17. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2012. – 212 с.
18. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
19. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – СПб.: НИЦ МС, 2020. – 120 с.

20. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков АИ. Наименьшее энергетическое принуждение при разгоне-торможении объекта // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2024. – №4(366). – С. 27-31.
21. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевская Т.В. Механика управляемого движения объектов: учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2021. – 170 с.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyansky B.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Optimal processes mathematical theory. – М.: Science, 1969. – 384 p.
2. Gamkrelidze R.V. Discovery of Pontryagin's maximum principle. – Laboratoire des Sciences des Information, 2013. – 12 p.
3. Bronstein I.N., Semendyaev K.A. Mathematics handbook for engineers and students. – М.: Science, 1981. – 720 p.
4. Abdullayev N.D., Petrov Yu.P. Theory and methods for optimal controllers designing. – L.: Energoatomizdat, 1985. – 240 p.
5. Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. Theoretical mechanics. Vol. 2. Dynamics. – М.: Science, 1985. – 496 p.
6. Butenin N.V. Introduction to analytical mechanics. – М.: Science, 1971. – 264 p.
7. Dobronravov V.V. Analytical mechanics fundamentals. – М.: Higher school, 1976. – 264 p.
8. Krasovskii N.N. Theory of motion control. – М.: Science, 1968. – 476 p.
9. Automatic control theory. Part II. Theory of nonlinear special automatic control systems / Ed. by A. A. Voronov. – М.: Higher school, 1997. – 288 p.
10. Chernousko F.L., Akulenko P.D., Sokolov B.N. Oscillations' control. – М.: Science, 1980. – 384 p.
11. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Koshkin V.P. Optimal control of motion of mechanical systems. – K.: UMK VO, 1988. – 235 p.
12. Troitsky V.A. Oscillations' optimal processes of mechanical systems. – L.: Mechanical Engineering, 1976. – 248 p.
13. Krutko P.D. Inverse problems of the controlled systems dynamics: linear models. – М.: Science, 1988. – 326 p.
14. Bokhonsky A.I. Control of the elastic systems' translational motion // Dynamic systems. 2004, iss. 18, pp. 56-63.
15. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Elastic objects' optimal translational motion // Dynamic systems. 2005, iss. 19, pp. 3-10.
16. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevsky M.I. Optimal control of the deformable objects' translational motion: theory and technical applications. – Sevastopol: Publ. house of SevNTU, 2007. – 296 p.
17. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Variational and reversion calculus in mechanics. – Sevastopol: Publ. house of SevNTU, 2012. – 212 p.
18. Bokhonsky A.I. Reversion principle of optimality. – М.: University textbook: INFRA, 2016. – 174 p.
19. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Design of optimal controls for the movement of elastic objects. – SPb.: SRC MS, 2020. – 120 p.
20. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. The least energy coercion during object's acceleration-deceleration // Fundamental and applied problems of engineering and technology. 2024, no. 4(366), pp. 27-31.

21. Bokhonskiy A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V. Mechanics of controlled motion of objects: tutorial. – M.: INFRA, 2021. – 170 p.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonsky Aleksandr Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the digital design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Майстришин Михаил Михайлович – кандидат технических наук, доцент, директор Морского колледжа bohon.alex@mail.ru	Maystrishin Mikhail Mikhailovich – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Marine college

Received 30.04.2025