

МОДЕЛЬ МНОГОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ЗВЕНЬЯМИ И УПРУГИМИ СОЕДИНИТЕЛЬНЫМИ ШАРНИРАМИ

Гукасян А.А.

Институт механики НАН Республики Армения, Ереван, Республика Армения

Ключевые слова: многозвенный упругий манипулятор, упругие звенья, упругие соединительные шарниры, кинематика манипулятора, асимптотический метод.

Аннотация. Исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора, звенья которого или часть из них моделируются как упругие тела или одномерные упругие стержни, а соединительные шарниры между звеньями содержат упругие элементы большой жесткости. В рамках линейной теории упругости с применением асимптотических методов кинематические величины движения манипулятора представлены в виде суммы трех слагаемых, которые необходимо учитывать при моделировании движений упругих манипуляционных систем. Методы исследования позволяют представить кинематику движения упругого манипулятора в рамках абсолютно жесткой модели путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью конструктивных элементов.

MODEL OF A MULTI-LINK MANIPULATOR WITH ELASTIC LINKS AND ELASTIC CONNECTING JOINTS

Ghukasyan A.A.

Institute of Mechanics of NAS Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia

Keywords: multi-link elastic manipulator, elastic links, elastic connecting hinges, manipulator kinematics, asymptotic method.

Abstract. The paper studies the kinematics of spatial motion of a multi-link manipulator, the links of which, or some of them, are modeled as elastic bodies or one-dimensional elastic rods, and the connecting hinges between the links contain elastic elements of high rigidity. Within the framework of the linear theory of elasticity using asymptotic methods, the kinematic quantities of the manipulator motion are presented as a sum of three terms that must be taken into account when modeling the motion of elastic manipulation systems. The research methods allow us to represent the kinematics of the elastic manipulator motion within the framework of an absolutely rigid model by introducing additional quantities due to the elasticity of the structural elements.

Введение. Экспериментальные исследования показывают, что упругая податливость конструкции манипулятора обусловлена различными факторами, которые можно разделить на две группы: упругая податливость соединительных узлов и упругая податливость звеньев [1-10]. Обеспечение высокой точности позиционирования и достаточного быстродействия упругих роботов возможно только за счет специальных режимов управления, осуществляющих гашение упругих колебаний в процессе движения манипулятора. Требование к работоспособности многозвенных манипуляторов обуславливает актуальность научных исследований по кинематике, динамике и управлению движением с упругими конструктивными элементами с применением теории упругости, асимптотических методов и методов управления системами с распределенными параметрами [11-17].

1. Обобщенные координаты, определяющие конфигурацию упругого манипулятора. Конфигурацию манипулятора (рис. 1) с абсолютно жесткими звеньями и с идеальными соединительными узлами в системе координат $OXYZ$ определим обобщенными координатами $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n; n \geq N)$, которые представляют собой совокупность углов относительных поворотов и линейных относительных перемещений звеньев, а также декартовы координаты основания (N – количество звеньев манипулятора). Через компоненты вектора

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T, \quad (k \leq n). \quad (1.1)$$

обозначим дополнительные обобщенные координаты исходной системы, обусловленные упругими элементами в соединительных узлах.

Обобщенные координаты, описывающие деформацию упругих звеньев манипулятора (смещение точек соответствующего звена относительно его недеформированного состояния), являются компонентами вектора

$$\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), \dots, w_\lambda(t, \xi))^T, \quad (1.2)$$

где ξ – произвольная точка упругого звена $\xi \in [0, l_i]$, $l_i (i = 1, 2, \dots, N)$ линейные размеры звеньев (рис. 2).

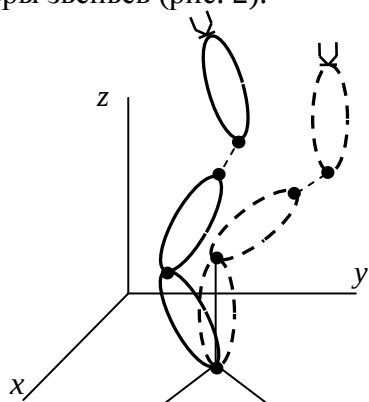


Рис. 1. Упругий манипулятор

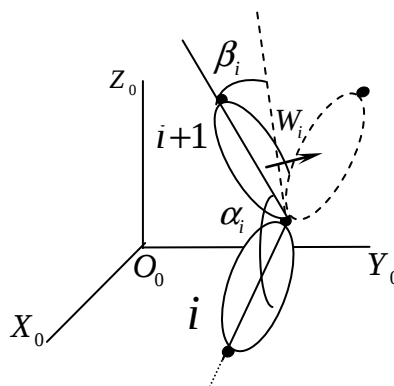


Рис. 2. Упругий соединительный шарнир и упругое звено

Положение инерционных элементов манипулятора в пространстве характеризуем m координатами

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T. \quad (1.3)$$

Кинематику манипулятора с упругими звеньями и с упругими соединительными узлами между звеньями в общем случае можно исследовать на основе соотношения

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w}), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \mathbf{w})$ – заданная m -мерная вектор-функция от вектора аргументов, структура которой зависит от выбора обобщенных координат жесткой и упругой модели манипулятора (1.1), (1.2).

Будем предполагать, что матрицами частных производных от (1.4) являются

$$\Phi^1(\alpha, \beta, w) = \left\{ \frac{\partial f_i(\alpha, \beta, w)}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}, \quad \Phi^2(\alpha, \beta, w) = \left\{ \frac{\partial f_i(\alpha, \beta, w)}{\partial \beta_j} \right\}_{i,j=1}^{m,k},$$

$$\Phi^3(\alpha, \beta, w) = \left\{ \frac{\partial f_i(\alpha, \beta, w)}{\partial w_j} \right\}_{i,j=1}^{m,\Lambda}, \quad (1.5)$$

$$\text{rang} \Phi^1(\alpha, \beta, w) = \min(m, n), \quad \text{rang} \Phi^2(\alpha, \beta, w) = \min(m, k),$$

$$\text{rang} \Phi^3(\alpha, \beta, w) = \min(m, \Lambda).$$

Для дальнейшего исследования основной задачи кинематики упругих манипуляторов, то есть определения в каждый момент времени положения, скоростей и ускорений движений инерционных элементов и схвата, или произвольной точки относительно инерциальной или связанной с произвольным звеном системы отсчета через обобщенные координаты α, β, w , скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{w}$ и ускорения $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{w}$, предполагаем, что обобщенные координаты β_i малы, а жесткость C_i соединительных узлов велика, то есть

$$\beta_i \sim \varepsilon, \quad C_i \sim \varepsilon^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1.6)$$

а компоненты вектора $w(t, \xi)$ в рамках линейной теории упругости малы по сравнению с линейными размерами упругого звена и удовлетворяют соотношениям [11, 12]

$$w_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad w'_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad \dot{w}_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \quad (i=1, 2, \dots, \Lambda), \quad (1.7)$$

здесь частные производные функции $w_i(t, \xi)$ по ξ обозначены штрихом, а по t – точкой. Заметим, что в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ соединительные узлы становятся идеальными, а упругие звенья – абсолютно твердыми телами.

В рамках предположений (1.6), (1.7) для исследования кинематики упругого манипулятора применим асимптотические методы малого параметра [8, 9, 11, 16].

Формула Тейлора для функции (1.4) относительно β и w с точностью ε , является

$$q = f(\alpha, 0, 0) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(\alpha, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i + \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{\partial f(\alpha, 0, 0)}{\partial w_j} w_j + O(\varepsilon^2), \quad (1.8)$$

введя следующие обозначения

$$f(\alpha) = f(\alpha, 0, 0), \quad f^{1*}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(\alpha, 0, 0)}{\partial \beta_i} \beta_i, \quad f^{2*}(\alpha, w) = \sum_{j=1}^{\Lambda} \frac{\partial f(\alpha, 0, 0)}{\partial w_j} w_j, \quad (1.9)$$

где имеют место условия

$$f^{1*}(\alpha, 0) \equiv 0, \quad f^{2*}(\alpha, 0) \equiv 0. \quad (1.10)$$

Разложения (1.8) с учетом обозначения (1.9) представим в виде

$$q = f(\alpha) + f^{1*}(\alpha, \beta) + f^{2*}(\alpha, w). \quad (1.11)$$

Из (1.11) можно предположить, что положение инерциальных элементов упругого манипулятора описывается в рамках жесткой модели путем

введения дополнительного вектора $\mathbf{f}^{1*}(\alpha, \beta)$, обусловленного упругостью соединительных узлов между звеньями и вектора $\mathbf{f}^{2*}(\alpha, \mathbf{w})$, обусловленного упругой податливостью звеньев манипулятора, порядок которых не превышает ε .

Движение рассматриваемой модели манипулятора имеет колебательный характер относительно движения жесткой модели [1-6].

Формула (1.11) позволяет исследовать кинематику манипулятора, когда соединительные узлы между звеньями идеальные, а звенья абсолютно жесткие ($\beta \equiv 0, \mathbf{w} \equiv 0$),

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha), \quad (1.12)$$

а также в случае упругих соединительных узлов между звеньями и абсолютно жесткими ($\mathbf{w} \equiv 0$) звеньями

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha) + \mathbf{f}^{1*}(\alpha, \beta) \quad (1.13)$$

и когда упругими являются звенья манипулятора, а соединительные узлы – идеальными

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\alpha) + \mathbf{f}^{2*}(\alpha, \mathbf{w}). \quad (1.14)$$

Все эти частные математические модели манипулятора имеют место и широко исследуются в научной литературе.

2. Обобщенная скорость движений упругого манипулятора.

Вычислим производные по времени от функций (1.11), получим вектор скорости характерных точек манипулятора в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\alpha)\dot{\alpha} + \mathbf{F}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + \mathbf{F}^2(\alpha, 0)\dot{\beta} + \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w})\dot{\alpha} + \mathbf{F}^4(\alpha, 0)\dot{\mathbf{w}} \quad (2.1)$$

или
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{v}^2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) + \mathbf{v}^3(\alpha, \dot{\alpha}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}), \quad (2.2)$$

где $\mathbf{v}^1(\alpha, \dot{\alpha}) = \mathbf{F}(\alpha)\dot{\alpha}$, $\mathbf{F}(\alpha) = \left\{ \frac{\partial f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbf{v}_i^1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j$ ($i = 1, 2, \dots, m$) (2.3)

определяет скорость движения манипулятора с абсолютно жесткими звеньями и идеальными соединительными шарнирами (узлами).

Дополнительным вектором скорости, обусловленным упругостью соединительных шарниров является

$$\mathbf{v}^2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) = \mathbf{F}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + \mathbf{F}^2(\alpha, 0)\dot{\beta}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{F}^1(\alpha, \beta) = \left\{ \frac{\partial f_i^{1*}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}$, $\mathbf{F}^2(\alpha, 0) = \left\{ \frac{\partial f_i(\alpha, 0)}{\partial \beta_j} \right\}_{i,j=1}^{m,k}$, (2.5)

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\alpha, 0)}{\partial \beta_l} \beta_l \right] \text{ и } \frac{\partial f_i^{1*}(\alpha, 0)}{\partial \alpha_j} \equiv 0;$$

$$\frac{\partial f_i^{1*}(\alpha, \beta)}{\partial \beta_l} = \frac{\partial}{\partial \beta_l} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\alpha, 0)}{\partial \beta_j} \beta_j \right] = \frac{\partial f_i(\alpha, 0)}{\partial \beta_l}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, k),$$

$$v_i^2 = \left(\mathbf{F}^1(\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{a}} \right)_i + \left(\mathbf{F}^2(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$v_i^2 = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \dot{\beta}_l \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.6)$$

Для определения вектора скорости

$$\mathbf{v}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) = \mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}}, \quad (2.7)$$

обусловленного упругостью звеньев, вычислим элементы матриц, $\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ и $\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0})$.

Матрица $\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ имеет размерность $(m \times n)$ с элементами

$$\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right\}_{i,j=1}^{m,n}, \quad (2.8)$$

где
$$\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right), \quad \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \alpha_j} \equiv 0,$$

$(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n).$

Матрица $\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ размерности $(m \times \Lambda)$ имеет следующую структуру

$$\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \left\{ \frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_j} \right\}_{i,j=1}^{m,\Lambda}, \quad (2.9)$$

где
$$\frac{\partial f_i^{2*}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right) = \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_j}$$

$(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, \Lambda).$

Следовательно, компонентами вектора скорости (2.7) являются

$$v_i^3 = \left(\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{a}} \right)_i + \left(\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}} \right)_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$v_i^3 = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right) \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} \dot{w}_l \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.10)$$

Итак, алгоритм вычисления скорости движения упругого манипулятора по формуле (2.1), в общем случае, сводится к необходимости дополнительного определения элементов матриц (2.5), (2.8), (2.9) и вычислению компонентов векторов (2.6) и (2.10). Вектор скорости движения упругого манипулятора имеет размерность m , компоненты которого определяются согласно (2.3), (2.6), (2.10)

$$v_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \dot{\beta}_l +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right) \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} \dot{w}_l \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.11)$$

Имея все компоненты вектора скорости упругого манипулятора, можно определить величину и направление скорости всех инерционных элементов и схвата. Из (2.6), (2.10), (2.11) следует, что векторы $\mathbf{v}^2(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$, $\mathbf{v}^3(\alpha, \dot{\alpha}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ имеют порядок ε и $\mathbf{v}^2(\alpha, \dot{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^3(\alpha, \dot{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

3. Ускорение движений упругого манипулятора. Вычисляя производные по времени от функции (2.1), определим ускорение движений упругого манипулятора

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\alpha) \dot{\alpha} + \mathbf{F}(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} + \mathbf{F}^1(\alpha, \beta) \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^2(\alpha, \mathbf{0}) \dot{\beta} + \mathbf{F}^2(\alpha, \mathbf{0}) \ddot{\beta} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w}) \dot{\alpha} + \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w}) \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\alpha, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}^4(\alpha, \mathbf{0}) \ddot{\mathbf{w}}. \quad (3.1)$$

По аналогии с (2.2) вектор ускорения (3.1) определим в виде суммы трех слагаемых

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*1}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) + \mathbf{w}^{*2}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) + \mathbf{w}^{*3}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}), \quad (3.2)$$

где
$$\mathbf{w}^{*1}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\alpha) \dot{\alpha} + \mathbf{F}(\alpha) \ddot{\alpha}. \quad (3.3)$$

соответствует ускорению движения абсолютно жесткой модели манипулятора,

$$\mathbf{w}^{*2}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} + \mathbf{F}^1(\alpha, \beta) \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^2(\alpha, \mathbf{0}) \dot{\beta} + \mathbf{F}^2(\alpha, \mathbf{0}) \ddot{\beta} \quad (3.4)$$

зависит от упругости соединительных узлов между звеньями, а вектор ускорения

$$\mathbf{w}^{*3}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w}) \dot{\alpha} + \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w}) \ddot{\alpha} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\alpha, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F}^4(\alpha, \mathbf{0}) \ddot{\mathbf{w}} \quad (3.5)$$

обусловлен упругостью звеньев манипулятора.

Дополнительные слагаемые в (3.4) и (3.5) тождественно равны нулю, когда соединительные шарниры между звеньями идеальные, а звенья абсолютно жесткие, то есть

$$\mathbf{w}^{*2}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}^{*3}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Для определения вектора ускорения по формуле (3.1), необходимо дополнительно определить элементы матриц

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\alpha), \frac{d}{dt} \mathbf{F}^1(\alpha, \beta), \frac{d}{dt} \mathbf{F}^2(\alpha, \mathbf{0}), \frac{d}{dt} \mathbf{F}^3(\alpha, \mathbf{w}), \frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\alpha, \mathbf{0}),$$

согласно (2.3), (2.5), (2.8) и (2.9).

Из (2.3) имеем
$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\alpha) = \left\{ \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_l} \dot{\alpha}_l \right\}_{i,j=1}^{m,n},$$
 а компонентами вектора

(3.3), являются

$$(\mathbf{w}^{*1}(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}))_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} \ddot{\alpha}_j + \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\alpha)}{\partial \alpha_j \partial \alpha_l} \dot{\alpha}_l \right) \dot{\alpha}_j \right] (i=1, 2, \dots, m). \quad (3.7)$$

Элементами матрицы $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}) = \{F_{il}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}})\}_{i,l=1}^{m,n}$ являются

$$\begin{aligned} F_{il}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{\beta}}) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i^*(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_{p=1}^k \frac{\partial^2 f_i^*(\mathbf{a}, \mathbf{\beta})}{\partial \alpha_l \partial \beta_p} \dot{\beta}_p = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j} \left[\sum_{p=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p} \beta_p \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{\vartheta=1}^k \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \beta_{\vartheta}} \left[\sum_{p=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p} \beta_p \right] \dot{\beta}_{\vartheta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и $F_{il}^1(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{0}) \equiv 0, (i=1, 2, \dots, m; \quad l=1, 2, \dots, n).$

Матрица $\frac{d\mathbf{F}^2(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{dt}$ имеет следующие элементы

$$\frac{d\mathbf{F}^2(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{dt} = \{F_{il}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})\}_{i,l=1}^{m,k},$$

$$\mathbf{F}_{il}^2(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \quad (i=1, 2, \dots, m; \quad l=1, 2, \dots, k). \quad (3.9)$$

После вычисления элементов матриц $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^1(\mathbf{a}, \mathbf{\beta}), \frac{d}{dt}\mathbf{F}^2(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ (3.8), (3.9), можно по (3.4) определить компоненты вектора ускорений $\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{\beta}}, \ddot{\mathbf{\beta}})$

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{\beta}, \dot{\mathbf{\beta}}, \ddot{\mathbf{\beta}}))_i &= \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \alpha_j} \left[\sum_{p=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p} \beta_p \right] \dot{\alpha}_j + \sum_{\vartheta=1}^k \frac{\partial^2}{\partial \alpha_l \partial \beta_{\vartheta}} \left[\sum_{p=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_p} \beta_p \right] \dot{\beta}_{\vartheta} \right\} \dot{\alpha}_l + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \beta_l \right) \right] \ddot{\alpha}_j + \sum_{l=1}^k \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j \right] \dot{\beta}_l + \sum_{l=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0})}{\partial \beta_l} \ddot{\beta}_l \\ &(i=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Матрица $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w})$ с размерностью $(m \times n)$ будет

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \{F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})\}_{i,j=1}^{m,n}. \quad (3.11)$$

Согласно (2.8), элементы $F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}})$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i^{*2}(\mathbf{a}, \mathbf{w})}{\partial \alpha_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right] = \\ &= \sum_{\vartheta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{\vartheta} \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_{\vartheta} + \sum_{p=1}^{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \\ &(F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0; \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Компоненты вектора $\frac{d}{dt}\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w})\dot{\mathbf{a}}$ определяются согласно (3.12)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \dot{\mathbf{a}} \right)_i &= \sum_{j=1}^n F_{ij}^3(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}) \dot{\alpha}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\vartheta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{\vartheta} \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_{\vartheta} + \sum_{p=1}^{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \right] \dot{\alpha}_j. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Элементами последней матрицы $\frac{d}{dt} F^4(\mathbf{a}, \mathbf{0})$ размерностью $(m \times \Lambda)$ являются

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \{F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}})\}_{i,j=1}^{m,\Lambda}, \quad F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial w_j} \dot{\alpha}_l. \quad (3.14)$$

Компоненты вектора $\frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}}$ имеют вид

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \dot{\mathbf{w}} \right)_i = \sum_{j=1}^{\Lambda} F_{ij}^4(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \dot{w}_j = \sum_{j=1}^{\Lambda} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial w_j} \dot{\alpha}_l \right) \dot{w}_j, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (3.15)$$

Векторы $\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \ddot{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \ddot{\mathbf{w}}$ из (3.5) определяются аналогично (2.8) и (2.9), соответственно

$$(\mathbf{F}^3(\mathbf{a}, \mathbf{w}) \ddot{\mathbf{a}})_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \ddot{\alpha}_j \right], \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (3.16)$$

$$(\mathbf{F}^4(\mathbf{a}, \mathbf{0}) \ddot{\mathbf{w}})_i = \sum_{j=1}^{\Lambda} \left[\frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \ddot{w}_j \right] = \sum_{j=1}^{\Lambda} \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_j} \right) \ddot{w}_j, \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (3.17)$$

Вектор ускорения $\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$, обусловлен упругостью звеньев манипулятора и имеет размерность m , компоненты которого определяются согласно формулам (3.13), (3.15)-(3.17).

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}))_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \ddot{\alpha}_j \right] + \sum_{j=1}^{\Lambda} \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial w_j} \right) \ddot{w}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\vartheta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{\vartheta} \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{\alpha}_{\vartheta} + \sum_{p=1}^{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial w_p \partial \alpha_j} \left(\sum_{l=1}^{\Lambda} \frac{\partial f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial w_l} w_l \right) \dot{w}_p \right] \dot{\alpha}_j + \\ &+ \sum_{j=1}^{\Lambda} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f_l(\mathbf{a}, 0, 0)}{\partial \alpha_l \partial w_j} \dot{\alpha}_l \right) \dot{w}_j, \quad (\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, 0, 0, 0))_i \equiv 0, \quad (i=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Следовательно, компоненты вектора ускорений (3.2) упругого манипулятора являются суммой компонентов (3.7), (3.10), (3.18). Заметим, что векторы $\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta})$ $\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}})$ имеют порядок ε и $\mathbf{w}^{*2}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, 0, 0, 0) \equiv 0$, $\mathbf{w}^{*3}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}, \ddot{\mathbf{a}}, 0, 0, 0) \equiv 0$.

Заключение. В рамках линейной теории упругости с применением асимптотических методов исследуется кинематика пространственного движения многозвенного манипулятора, звенья которого или часть из них моделируются как упругие тела, а соединительные шарниры между звеньями

содержат упругие элементы большой жесткости. Методы исследования позволяют представить кинематические величины движения упругого манипулятора в рамках абсолютно жесткой модели путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью конструктивных элементов. Для определения кинематических величин необходимо вычислить элементы ряда матриц и их производные по времени, сделать ряд вычислений, которые для современной вычислительной техники являются весьма простыми. Результаты исследования можно учитывать при моделировании движений гибких манипуляционных систем.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Болотник Н.Н. Манипуляционные роботы. – М.: Наука, 1989. – 363 с.
2. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жёсткости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №4. – С. 101-113.
3. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – №3. – С. 118-124.
4. Акуленко Л.Д., Гукасян А.А. Управление плоским движением упругого звена манипулятора // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – №5. – С. 33-41.
5. Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Грудев А.И., Черноусько Ф.Л. О влиянии упругой податливости конструкции роботов на их динамику // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №3. – С. 63-71.
6. Черноусько Ф.Л., Градецкий В.Г., Гукасян А.А., Вешников В.Б., Самвелян К.В., Степанов В.П., Шушко Д.А. Анализ упругой податливости конструкции манипуляционных роботов. Препринт 231. – М.: ИПМ АН СССР, 1984. – 66 с.
7. Болотник Н.Н., Гукасян А.А. Управление движением манипулятора с учётом упругих колебаний струны // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – №4. – С. 38-46.
8. Гукасян А.А. Кинематика многозвенного манипулятора с упругим последним звеном // Известия НАН Армении. Механика. – 2002. – Т. 55, №3. – С. 79-87.
9. Гукасян А.А. О моделях многозвенных манипуляторов // Мехатроника, автоматика и робототехника. – 2023. – №12. – С. 9-13
10. Гукасян А.А. О кинематике многозвенного манипулятора с упругими соединительными узлами и с упругими звеньями. // Известия НАН Армении. Механика. – 2014. – Т. 67, №3. – С. 68-83.
11. Новожилов В.В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 245 с.
12. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
13. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
15. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1987. – 365 с.
16. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
17. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.

References

1. Chernousko F.L., Gradetsky V.G., Bolotnik N.N. Manipulation robots. – M.: Science, 1989. – 363 p.
2. Chernousko F.L. Dynamics of systems with elastic elements of high rigidity // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1983, no. 4, pp. 101-113.
3. Akulenko L.D., Mikhailov S.A., Chernousko F.L. Modeling the dynamics of a manipulator with elastic links // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1981, no. 3, pp. 118-124.
4. Akulenko L.D., Ghukasyan A.A. Control of flat motion of an elastic link of a manipulator // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1983, no. 5, pp. 33-41.
5. Gradetsky V.G., Ghukasyan A.A., Grudev A.I., Chernousko F.L. On the influence of elastic compliance of robot structures on their dynamics // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1985, no. 3, pp. 63-71.
6. Chernousko F.L., Gradetsky V.G., Ghukasyan A.A., Veshnikov V.B., Samvelyan K.V., Stepanov V.P., Shushko D.A. Analysis of elastic compliance of manipulation robot structures. Preprint 231. – M.: IPM AS USSR, 1984. – 66 p.
7. Bolotnik N.N., Ghukasyan A.A. Motion control of a manipulator taking into account elastic vibrations of a string // News of AS USSR. Mechanics of Solids. 1984, no. 4, pp. 38-46.
8. Ghukasyan A.A. Kinematics of a multi-link manipulator with an elastic last link // News of NAS of Armenia. Mechanics. 2002, vol. 55, no. 3, pp. 79-87.
9. Ghukasyan A.A. On models of multi-link manipulators // Mechatronics, automation and robotics. 2023, no. 12, pp. 9-13.
10. Ghukasyan A.A. On the kinematics of a multi-link manipulator with elastic connecting nodes and with elastic links // News of NAS of Armenia. Mechanics. 2014, vol. 67, no. 3, pp. 68-83.
11. Novozhilov V.V. Theory of Elasticity. – Leningrad: Sudpromgiz, 1958. – 245 p.
12. Timoshenko S.P., Goodyer J. Theory of Elasticity. – M.: Science, 1979. – 560 p.
13. Krasovsky N.N. Theory of Motion Control. – M.: Science, 1968. – 475 p.
14. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical Theory of Optimal Processes. – M.: Science, 1983. – 392 p.
15. Akulenko L.D. Asymptotic Methods of Optimal Control. – M.: Science, 1987. – 365 p.
16. Butkovsky A.G. Methods for controlling systems with distributed parameters. – M.: Science, 1975. – 568 p.
17. Sirazetdinov T.K. Optimization of systems with distributed parameters. – M.: Science, 1977. – 480 p.

Гукасян Артуш Апресович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ghukasyan10@yandex.com	Ghukasyan Artush Apresovich – doctor of physical and mathematical sciences, professor, leading researcher
--	--

Received 21.04.2025