

ПРИМЕРЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.², Рыжков А.И.¹

¹*Севастопольский государственный университет;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова,
Севастополь, Россия*

Ключевые слова: оптимальное движение, краевые условия, управление разгон-торможение, достижение покоя, минимум критерия, экономия энергии.

Аннотация. При поиске оптимального поступательного движения объекта с использованием полинома (аналитической функции) для перемещения заранее заданы максимальное перемещение и время движения. Найдены такие управления (переносные ускорения), при которых объект переместиться из исходного в конечное состояние покоя с экономией энергии (по сравнению с известным классическим случаем управления типа разгон-торможение, полученным вариационным методом теории оптимального управления, задача Лагранжа). Решение задач конструирования управлений иллюстрируется на простых примерах.

EXAMPLES OF OPTIMAL MOVEMENT DESIGN

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.², Ryzhkov A.I.¹

¹*Sevastopol State University;*

²*Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia*

Keywords: optimal motion, boundary conditions, acceleration-braking control, achieving rest, minimum criterion, energy saving.

Abstract. When searching for the optimal translational motion of an object using a polynomial (analytical function) for movement, the maximum movement and time of movement are specified in advance. Such controls (transfer accelerations) are found, under which the object moves from the initial to the final state of rest with energy savings (in comparison with the well-known classical case of acceleration-deceleration type control obtained by the variational method of optimal control theory, the Lagrange problem). The solution to control design problems is illustrated by simple examples.

Классические методы современной теории оптимального управления, примеры их эффективного применения при решении актуальных задач техники приведены в работах [1-5] и ряде других. Глубоко разработаны методы использования принципа максимума, вариационных методов теории оптимального управления, аналитического конструирования регуляторов и другие.

С развитием компьютерных технологий, систем аналитических вычислений появилась возможность облегчения трудоемкости получения оптимальных управлений, например, с привлечением алгоритма решения полной обратной задачи вариационного исчисления [6-10]. В [7] сформулирован реверсионный принцип оптимальности (РПО), свидетельствующий, что решение полной обратной задачи вариационного исчисления (без предварительно задания критериев) приводит к появлению

новых функционалов-критериев, экстремумы которых подтверждают оптимальности управления.

Реверсионное конструирование управлений типа разгон-торможение предполагает не только достижение цели движения с минимальной затратой энергии, но и возможность облегчения практической реализации таких управлений.

Цель исследований – обратить внимание на влияние степени полинома и характерных условий (ограничений) при конструировании новых типов управлений.

1. В случае классического управления (рис. 1), задача Лагранжа при движении из исходного в конечное состояние покоя, критерия оптимальности

$J = \int_0^T U^2 dt$ решение для $U(t)$ может быть получено и без критерия путем

удовлетворения краевым условиям [5]. В этом простейшем случае при

$T = 1 \text{ с}$, $L = 1 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$ энергия $A = 2m \int_0^T U \cdot V dt = 2,25 \text{ Дж}$.

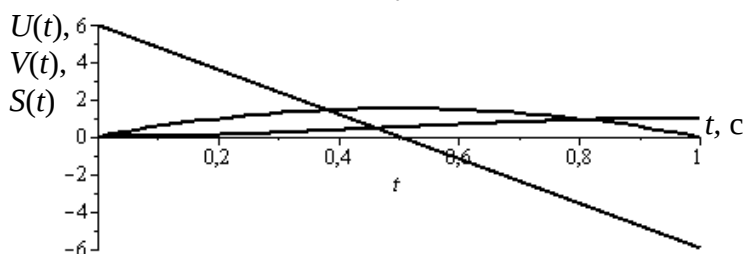


Рис. 1. Классическое управление: графики ускорения, скорости и перемещения

2. Влияние условий конструирования на энергоемкость управления иллюстрируется на примере.

Полином, предполагающий оптимальное движение объекта, задан в виде

$$S(t) = \sum_{i=1}^6 C_i \cdot t^{i-1}, \quad (1)$$

где коэффициенты $C_1 \div C_6$ подлежат определению из условий достижения поставленной цели движения и свойств оптимальности переносного движения объекта. Из (1) для скорости $V(t)$ и ускорения (управления) $U(t)$ следуют выражения:

$$V(t) = \frac{dS}{dt}, \quad U(t) = \frac{dV}{dt}, \quad \dot{U}(t) = \frac{dU}{dt}. \quad (2)$$

Для достижения поставленной цели должны выполняться условия движения из состояния покоя в новое состояние покоя:

$$S(0) = 0, \quad V(0) = 0; \quad S(T) = 0, \quad V(T) = 0, \quad (3)$$

где T , L – общее время и расстояние, на которое перемещается объект за время T .

Из условий (3) как системы линейных алгебраических уравнений можно предварительно найти константы C_1, C_2, C_3, C_4 . Оставшиеся константы C_5 и C_6 находятся, например, из условия снижения энергии, т.е. критерия оптимальности, который ранее был получен при реверсионном конструировании оптимального переносного движения объекта [6-10]:

$$J = \int_0^T [\dot{U}(t)]^2 dt = \min. \quad (4)$$

После интегрирования из (4) следуют линейные уравнения, из которых при $\frac{\partial J}{\partial C_5} = 0, \frac{\partial J}{\partial C_6} = 0$ найдены коэффициенты $C_5 = -\frac{5}{2} \frac{L}{T^4}, C_6 = \frac{L}{T^5}$.

Выражения для $S(t), V(t)$ и $U(t)$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} S(t) &= L \cdot \frac{t^2 (5T^3 - 5t^2T + 2t^3)}{T^5}, \quad V(t) = \frac{5L}{T} \cdot \frac{t(T^3 - 2t^2T + t^3)}{T^4}, \\ U(t) &= \frac{5L}{T^2} \cdot \frac{(T^3 - 6t^2T + 4t^3)}{T^3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Графики функций (5) построены при $L = 1 \text{ м}, T = 1 \text{ с}$ (рис. 2). При $m = 1 \text{ кг}$ энергия для достижения цели движения равна

$$A = 2 \int_0^{T/2} U(t) \cdot V(t) dt = 2,4414 \text{ Дж.}$$

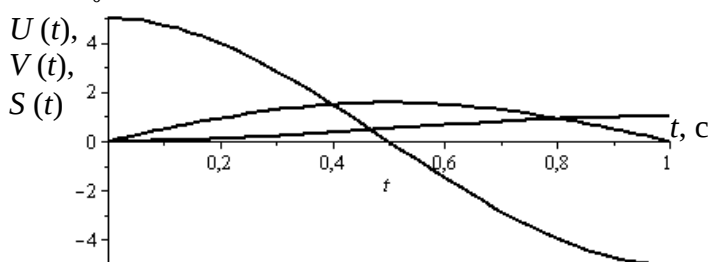


Рис. 2. Графики ускорения, скорости и перемещения (в случае полинома пятой степени)

Здесь энергия, затрачиваемая на достижение цели движения, возрастает по сравнению с предыдущим случаем конструирования управления.

3. Пример конструирования управления при увеличении степени полинома и критерия оптимальности.

Для конструирования управления типа разгон-торможение использован полином

$$S(t) = \sum_{i=1}^8 C_i t^{i-1}. \quad (6)$$

Приняты дополнительные условия, которые приводят к снижению энергии

$$U(T/2) = 0, \quad \dot{U}(T/2) = 0. \quad (7)$$

Как и ранее, появившиеся константы C_7 , C_8 в связи с ростом степени полинома найдены с использованием дополнительных условий:

$$\frac{\partial J}{\partial C_7} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial C_8} = 0. \quad (8)$$

В этом случае получено

$$C_7 = -\frac{36L}{T^6}, \quad C_8 = \frac{72}{7} \frac{L}{T^7}. \quad (9)$$

Выражения для $S(t)$, $V(t)$ и $U(t)$ громоздки и поэтому здесь не приводятся, но их графики при $L = 1$ м, $T = 1$ с, приведены на рисунке 3.

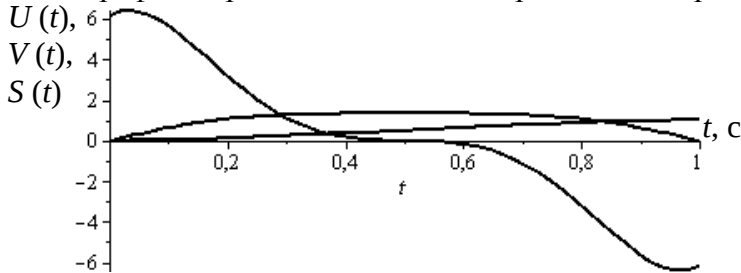


Рис. 3. Графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$ в случае полинома седьмой степени и критерии

$$\int_0^T [\dot{U}(t)]^2 dt$$

Появляется снижение энергии для достижения цели движения (при $m = 1$ кг):

$$A = \int_0^{T/2} U(t) \cdot V(t) dt = 1,7696 \text{ Дж}. \quad (10)$$

Если при использовании полинома (6) принять критерий $J = \int_0^T \ddot{U}^2 dt$, то,

после вычислений констант C_7 и C_8 из условий $\frac{\partial J}{\partial C_7} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial C_8} = 0$, значение энергии $A = 1,5873$ Дж (рис. 4).

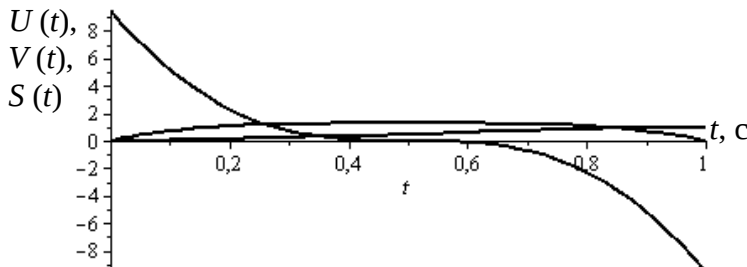


Рис. 4. Графики $S(t)$, $V(t)$, $U(t)$ в случае полинома седьмой степени и критерии $\int_0^T \ddot{U}^2 dt$

Интересно, что и при критерии $J = \int_0^T \ddot{U}^2 dt$ энергия имеет близкое значение $A = 1,6427$ Дж.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движения. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
5. Воронов А.А. Теория Автоматического управления. Ч. II. Теория нелинейных специальных систем автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.
6. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 216 с.
7. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА, 2016. – 174 с.
8. Бохонский А.И., Варминская Н.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов. – СПб.: НИЦ МС, 2020. – 120 с.
9. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевская Т.В. Механика управляемого движения объектов: учебное пособие. – М.: ИНФРА, 2021. – 170 с.
10. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Оптимальное переносное движение объектов конечной жесткости: Монография. – СПб.: Медиапайр, 2024. – 154 с.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.V. Mathematical theory of optimal processes. – M.: Fizmatgiz, 1961. – 392 p.
2. Krasovskii N.N. Theory of motion control. – M.: Science, 1968. – 476 p.
3. Krutko P.D. Inverse problems of the dynamics of controlled systems: linear models. – M.: Science, 1987. – 304 p.
4. Solodovnikov V.V., Plotnikov V.N., Yakovlev A.V. Fundamentals of the theory and elements of automatic control systems. – M.: Mechanical Engineering, 1985. – 536 p.
5. Voronov A.A. Theory of Automatic Control. Part II. Theory of nonlinear special automatic control systems. – M.: Higher School, 1986. – 504 p.
6. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevsky M.I. Optimal control of the transfer motion of deformable objects: theory and technical applications. – Sevastopol: Publ. house of SevNTU, 2007. – 216 p.
7. Bokhonsky A.I. Reversion principle of optimality. – M.: University textbook: INFRA, 2016. – 174 p.
8. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. Design of optimal controls for the movement of elastic objects. – SPb.: SRC MS, 2020. – 120 p.
9. Bokhonskiy A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V. Mechanics of controlled motion of objects: tutorial. – M.: INFRA, 2021. – 170 p.

10. Bokhonskiy A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Optimal translational motion of objects of finite rigidity: Monograph. – SPb.: Mediapapir, 2024. – 154 p.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonsky Aleksandr Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the Digital Design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of Physics and General Technical Disciplines
Рыжков Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Цифровое проектирование»	Ryzhkov Aleksandr Igorevich – candidate of technical sciences, associate professor of the Digital Design Department
bohon.alex@mail.ru	

Received 28.03.2025