

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-42-46>

ПОДАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С РЕЗОНАНСОМ

Бохонский А.И.¹, Варминская Н.И.², Мозолевская Т.В.²

¹*Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия;*

²*Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, Севастополь, Россия*

Ключевые слова: линейная упругая система, вынужденные колебания, резонанс, подавление колебаний, моментные соотношения, время движения, достижение абсолютного покоя.

Аннотация. На примерах линейной системы с одной и двумя степенями свободы показано явление подавления свободных колебаний при использовании резонансного воздействия. Параметры воздействия найдены с использованием моментных соотношений при задании (из физических соображений) общего времени движения. С целью упрощения аналитических преобразований для поиска решения системы уравнений (в резонансном режиме) для объекта с двумя степенями свободы использован метод главных координат.

OSCILLATIONS' SUPPRESSION OF THE LINEAR SYSTEM WITH RESONANCE

Bokhonsky A.I.¹, Varminskaya N.I.², Mozolevskaya T.V.²

¹*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia;*

²*P.S. Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia*

Keywords: linear elastic system, forced oscillations, oscillation suppression, resonance, moment relations, motion time, achieving absolute quiescence.

Abstract. The phenomenon of free oscillations suppression using resonant action is shown using examples of a linear system with one and two degrees of freedom. The parameters of the action are found using moment relationships when specifying (from physical considerations) the total time of movement. In order to simplify analytical transformations for finding a solution to the equations' system (in resonant mode) for an object with two degrees of freedom, the method of principal coordinates is used.

Введение

Теория колебаний линейных и нелинейных механических систем находит непосредственное практическое приложение в динамических расчетах механических систем [1-3]. Исследованию резонансов посвящено достаточное количество научных трудов. В робототехнике, например, в резонансном режиме находится система передатчик-приемник сигнала.

При резонансе, как известно, наблюдается не только рост амплитуд колебаний и внутренних усилий, но не исключается и подавление собственных колебаний упругой системы, обусловленных, например, начальными возмущениями. Свободные и вынужденные колебания упругого объекта (перемещения и скорости) в некоторый фиксированный момент времени могут одновременно быть равны нулю, что позволяет использовать это событие для подавления колебаний.

Цель исследований – изучение особенностей использования явления резонанса для подавления колебаний линейных систем конечным числом степеней свободы.

Резонансное подавление колебаний системы с одной степенью свободы

Уравнение движения объекта

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin(pt), \quad (1)$$

где $k = p = 1 \text{ с}^{-1}$, $T = 2\pi/k = 2\pi \text{ с}$. Для численного анализа приняты начальные условия: $x(0) = 6$, $\dot{x}(0) = 0$. Решение уравнения (1):

$$x = \frac{A}{2} \sin t + 6 \cos t - \frac{A}{2} t \cos t. \quad (2)$$

Скорость

$$\dot{x} = -6 \sin t + \frac{A}{2} t \sin t. \quad (3)$$

Константа A найдена с использованием условия $t = \pi \text{ с}$, т.е. в данном случае $A = 12/\pi$.

Поэтому из (2) и (3) следует:

$$x = \frac{6}{\pi} \sin t + 6 \cos t - \frac{6}{\pi} t \cos t, \quad \dot{x} = 6 \sin t \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right). \quad (4)$$

Графики $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ изображены на рисунке 1.

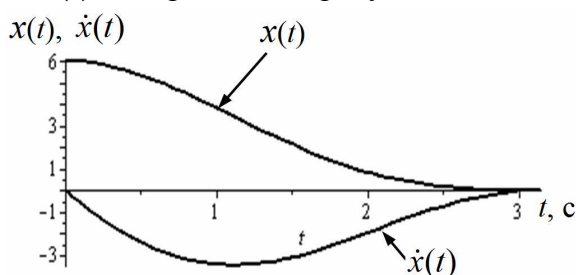


Рис. 1. Графики перемещения $x(t)$, и скорости $\dot{x}(t)$ при $T = \pi \text{ с}$

В момент времени $t = \pi \text{ с}$ с учетом отключения резонансного воздействия наступает покой. Если, например, принять $T = 2\pi \text{ с}$, то и в этот момент времени (с учетом прежних начальных условий) наступает покой, т.е. подавление колебаний, обусловленных начальными условиями (рис. 2).

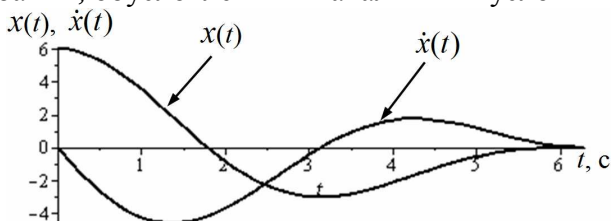


Рис. 2. Графики перемещения $x(t)$, и скорости $\dot{x}(t)$ при $T = 2\pi \text{ с}$

Колебания в резонансе системы с двумя степенями свободы

Система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + C_1 x_1 - C_2 (x_2 - \lambda_1) &= F(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_2 (x_2 - \lambda_1) &= F(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где x_1, x_2 – физические координаты; m_1, m_2 – сосредоточение массы; C_1, C_2 – коэффициенты жесткости; $F(t)$ – внешнее воздействие.

Для упрощения анализа динамического поведения системы дальше использован метод главных координат.

Система (5) с использованием метода главных координат приводится к уравнениям

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{Q_1}{M_1}, \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{Q_2}{M_2}, \quad (6)$$

где q_1, q_2 – обобщенные (главные) координаты; ω_1, ω_2 – частоты собственных колебаний; M_1, M_2 – обобщенные массы.

Полагаем, что формы (моды) вынужденных колебаний соответствуют формам свободных колебаний. Согласно методу главных координат физические координаты x_1, x_2 выражаются через обобщенные следующим образом:

$$x_1 = q_1 v_{11} + q_2 v_{12}, \quad x_2 = q_1 v_{21} + q_2 v_{22}. \quad (7)$$

Обобщенные массы выражаются так:

$$M_1 = m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2, \quad M_2 = m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2. \quad (8)$$

Соответственно, обобщенные силы

$$Q_1 = F(t)(v_{11} + v_{21}), \quad Q_2 = F(t)(v_{12} + v_{22}), \quad (9)$$

где в (7), (8), (9) амплитудные коэффициенты $v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22}$ отражают две формы колебаний.

После подстановки частных решений в систему однородных уравнений (без правых частей) и преобразований коэффициенты второй формы колебаний

$$v_{21} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_1^2}{C_2}, \quad v_{22} = \frac{C_1 + C_2 - m_1 \omega_2^2}{C_2}. \quad (10)$$

При этом для первой формы колебаний принято $v_{11} = v_{12} = 1$.

Проектирование системы с задаваемыми частотами собственных колебаний

Для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы при $m_1 = m_2 = 1$ кг частотное уравнение принимает вид:

$$\omega^4 - (C_1 + 2C_2)\omega^2 + C_1 C_2 = 0. \quad (11)$$

Для заданных частот собственных колебаний ω_1, ω_2 найдены коэффициенты жесткости C_1, C_2 . Если принять $\omega_1 = 4 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 16 \text{ с}^{-1}$, то из (11) получим систему двух алгебраических уравнений

$$C_1 + 2C_2 - 272 = 0, \quad C_1 C_2 - 4096 = 0, \quad (12)$$

корни которой $C_1 = 34,4916 \text{ Н/м}$, $C_2 = 118,7543 \text{ Н/м}$.

Пример подавления колебаний

Для численных исходных данных коэффициенты форм колебаний $\nu_{11} = \nu_{12} = 1$; $\nu_{21} = 1,1557$; $\nu_{22} = -0,8653$.

Двухчастотное резонансное влияние воздействие принято в виде:

$$F(t) = A \sin 4t + B \cos 4t + C \sin 16t + E \cos 16t, \quad (13)$$

где константы A, B, C, E найденных из моментных соотношений $x_1(T) = 0$, $\dot{x}_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$, $\dot{x}_2(T) = 0$ при $t = T = 2\pi/4 \text{ с}$ и заданных начальных условиях:

$$x_1(0) = 0,4 \text{ м}, \quad \dot{x}_1(0) = 0,58 \text{ м/с}, \quad x_2(0) = 4 \text{ м}, \quad \dot{x}_2(0) = 0,58 \text{ м/с}.$$

Решение найдено с использованием функции *fsolve* (в Maple).

Графики физических координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ изображены на рисунках 3 а, б.

В фиксированный момент времени достигается абсолютный покой (с отключением резонансного воздействия).

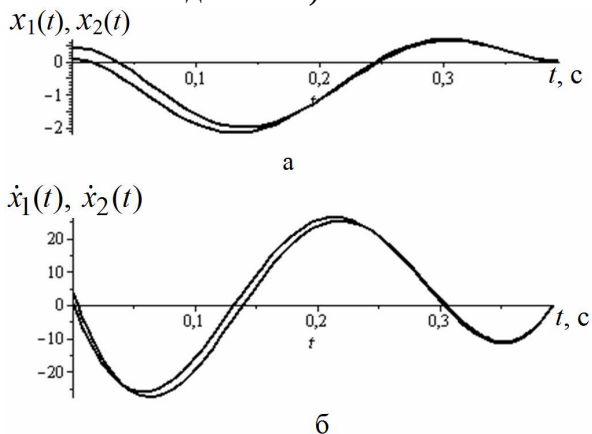


Рис. 3. Графики а) $x_1(t), x_2(t)$; б) $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$

Заключение

На численных примерах для системы с одной и двумя степенями свободы проиллюстрирован алгоритм определения параметров резонансного воздействия, позволяющего при заданных физических параметрах объекта и общего времени движения достичь состояния покоя. Метод главных координат облегчил достижение цели исследования.

С энергетической точки зрения резонансное подавление колебаний может иметь преимущество по сравнению с использованием случайных воздействий (помех).

Отметим, что резонансное управление представляет собой один из частных случаев управления колебаниями деформируемых объектов, на которые обращено внимание, например, в работах [4, 5].

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
4. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевский М.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2007. – 296 с.
5. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Мозолевская Т.В. Механика управляемого движения объектов: учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2021. – 170 с.

References

1. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Oscillations in engineering. – M.: Science, 1967. – 444 p.
2. Panovko Ya.G. Fundamentals of the applied theory of oscillations and impact. – L.: Mechanical Engineering, 1976. – 320 p.
3. Biderman V.L. Applied theory of mechanical oscillations. – M.: Higher school, 1972. – 416 p.
4. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevsky M.I. Optimal control of the translational motion of deformable objects: theory and technical applications. – Sevastopol: Publ. house of SevNTU, 2007. – 296 p.
5. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Mozolevskaya T.V. Mechanics of objects controlled motion; textbook. – M.: Infra-M, 2021. – 170 p.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	Bokhonsky Aleksandr Ivanovich – doctor of technical sciences, professor, professor of the digital design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	Varminskaya Natalia Ivanovna – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Мозолевская Татьяна Викторовна – кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры физики и общетехнических дисциплин	Mozolevskaya Tatyana Viktorovna – candidate of technical sciences, associate professor, professor of the Department of physics and general technical disciplines
bohon.alex@mail.ru	

Received 21.02.2025