

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2025-46-34-41>

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА

*Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Абрашкин П.М., Ликанин А.В.*

*Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия*

**Ключевые слова:** трубопровод, колебания, динамическая устойчивость, дифференциальные уравнения, функционал Ляпунова.

**Аннотация.** Представлен вывод уравнений, описывающих продольно-поперечные колебания предварительно изогнутого стержня, как уравнений Эйлера для функционала Остроградского-Гамильтона. На основе этих уравнений с помощью добавления слагаемых, учитывающих воздействие протекающей внутри полого стержня жидкости, получены уравнения продольно-поперечных колебаний трубопровода. Для системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих колебания трубопровода с учетом предварительного изгиба, построен функционал Ляпунова, на основе которого получены достаточные условия динамической устойчивости трубопровода.

## INVESTIGATION OF THE DYNAMIC STABILITY OF THE PIPELINE

*Velmisov P.A., Tamarova Yu.A., Abrashkin P.M., Likanin A.V.*

*Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia*

**Keywords:** pipeline, oscillations, dynamic stability, differential equations, Lyapunov functional.

**Abstract.** The derivation of equations describing longitudinal-transverse oscillations of a pre-bent rod is presented, as Euler equations for the Ostrogradsky-Hamilton functional. Based on these equations, by adding terms that take into account the effect of the liquid flowing inside the hollow rod, equations of longitudinal-transverse oscillations of the pipeline are obtained. For a system of nonlinear differential equations describing oscillations of the pipeline taking into account the pre-bending, a Lyapunov functional is constructed, on the basis of which sufficient conditions for the dynamic stability of the pipeline are obtained.

Трубопровод, который транспортирует жидкости, выступает в качестве важнейшего компонента в различных инженерных системах. Эти трубопроводы имеют широкое применение в таких областях, как аэрокосмическая промышленность, машиностроение, гражданское строительство, морское дело, биология, ядерная энергетика, нефтяная энергетика и гидроэнергетика. Различные проблемы динамики и устойчивости, обычно возникающие в трубопроводных системах транспортировки жидкости, обусловлены действиями внутренней жидкости и внешней среды. В инженерии возникновение сложных явлений, таких как неустойчивость, значительная вибрация, часто приводит к пагубным последствиям, в том числе к структурным повреждениям, ухудшению точности и сокращению срока службы трубопровода. Изучению и описанию колебаний трубопроводов, распространения волн в трубопроводах, содержащих газожидкостную среду, устойчивости упругих тел,

взаимодействующих с потоком жидкости, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, например, [1-13].

В данной статье исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику трубопровода с учетом предварительного изгиба. При этом параметры, характеризующие механическую систему (как трубопровод, так и внешние связи) являются переменными и зависят от координаты  $x$ . Для исследования устойчивости используется аналитический метод, который основан на построении положительно определенных функционалов типа Ляпунова.

Введем в рассмотрение функционал Остроградского-Гамильтона

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[ \mu(x) (w_t^2 + u_t^2) + J_0(x) w_{xt}^2 - E(x) J(x) w_{xx}^2 + P(x, t) w_x^2 - \right. \\ \left. - E(x) F(x) \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + w_x v_x \right)^2 + 2 f(x, t) w + 2 g(x, t) u + 2 H(u, w, x, t) \right] dx dt. \quad (1)$$

В частных случаях функционал (1) представлен в [14, 15]. Уравнения Эйлера для функционала (1) имеют вид

$$\mu u_{tt} - \left[ EF \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + w_x v_x \right) \right]_x - \frac{\partial H}{\partial u} = g, \quad (2)$$

$$\mu w_{tt} + (E J w_{xx})_{xx} - \left[ EF \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + w_x v_x \right) (w_x + v_x) \right]_x - (J_0 w_{xt})_{xt} + \\ + (P w_x)_x - \frac{\partial H}{\partial w} = f. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) описывают продольно-поперечные колебания стержня, при этом  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$  – продольная и поперечная деформации стержня. В формулах (1)-(3)  $\mu(x) = \rho(x) \cdot F(x)$  – масса единицы длины стержня;  $E(x)$  – модуль упругости;  $J(x)$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний;  $D(x) = E(x) J(x)$  – изгибная жесткость;  $J_0(x)$  – момент инерции единицы длины стержня относительно нейтральной оси, перпендикулярной к плоскости колебаний;  $\rho(x)$  – плотность материала стержня;  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня;  $P(x, t)$  – продольная сила;  $g(x, t)$  – продольная распределенная нагрузка;  $f(x, t)$  – поперечная распределенная нагрузка; нелинейная относительно  $w, u$  функция  $H(u, w, x, t)$  определяет действие внешних связей;  $v(x)$  – предварительный изгиб стержня; индексы  $x, t$  снизу обозначают частные производные по координате  $x$  и времени  $t$ .

При составлении функционала Остроградского-Гамильтона (1) были учтены следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) (w_t^2 + u_t^2) dx \quad - \quad \text{кинетическая энергия поперечных и}$$

продольных смещений элементов стержня;

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l J_0(x) w_{xt}^2 dx \quad - \quad \text{кинетическая энергия вращений элементов стержня}$$

вокруг осей, перпендикулярных к плоскости колебаний;

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) J(x) w_{xx}^2 dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия упругой деформации;}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) F(x) \left( u_x + \frac{1}{2} w_x^2 + w_x v_x \right)^2 dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия}$$

продольного натяжения;

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \int_0^l 2 f(x, t) w dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия прогиба от поперечной}$$

распределенной нагрузки  $f(x, t)$ ;

$$\Pi_4 = \frac{1}{2} \int_0^l 2 g(x, t) u dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия продольного смещения от}$$

продольной распределенной нагрузки  $g(x, t)$ ;

$$\Pi_5 = \frac{1}{2} \int_0^l P(x, t) w_x^2 dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия растяжения от продольной}$$

силы  $P(x, t)$ ;

$$\Pi_6 = \frac{1}{2} \int_0^l 2 H(u, w, x, t) dx \quad - \quad \text{потенциальная энергия поперечных и}$$

продольных смещений от действия внешних связей.

Уравнения продольно-поперечных колебаний трубопровода получим из (2), (3), добавляя слагаемые, учитывающие воздействие протекающей внутри трубопровода жидкости и внутреннее трение (демпфирование) в материале трубопровода и в системе внешних связей, а также уточняя характер внешнего воздействия

$$\mu \ddot{u} - \left[ EF \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 + w' v' \right) \right]' - (\gamma_2 \dot{u}') + \gamma_1 \dot{u} + \gamma_0 u + H^*(u, \dot{u}, x, t) = g, \quad (4)$$

$$\mu \ddot{w} - \left[ EF \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 + w' v' \right) (w' + v') \right]' + (EJw'')'' + (\alpha_2 \dot{w}'')'' - \left[ (J_0 \dot{w}')' \right]' + \quad (5)$$

$$+ (Pw')' + m_* U^2(t) w'' + 2m_* U(t) \dot{w}' + m_* \dot{U}(t) w' + \alpha_1 \dot{w} + \alpha_0 w + G^*(w, \dot{w}, x, t) = f.$$

В формулах (4), (5)  $\mu(x) = m_0(x) + m_*$  ( $m_0(x) = \rho(x)F(x)$  – погонная масса трубопровода;  $m_* = \rho_*F_*$  – погонная масса жидкости,  $\rho_*$  – плотность жидкости,  $F_*$  – площадь поперечного сечения, занятого жидкостью,  $\rho_*$  и  $F_*$  – постоянные);  $\gamma_2(x)$ ,  $\alpha_2(x)$  – коэффициенты внутреннего трения (демпфирования) в материале трубопровода;  $\gamma_1(x)$ ,  $\alpha_1(x)$  – коэффициенты демпфирования внешних связей;  $\gamma_0(x)$ ,  $\alpha_0(x)$  – коэффициенты жесткости внешних связей;  $H^*$ ,  $G^*$  – нелинейные относительно  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $w$ ,  $\dot{w}$  составляющие сил реакции и демпфирования внешних связей; функции  $f$ ,  $g$ ,  $P$  зависят от  $x$ ,  $t$ ; функции  $E$ ,  $F$ ,  $J$ ,  $J_0$  зависят от  $x$ ; штрих сверху обозначает производную по координате  $x$ , точка сверху – производную по времени  $t$ .

Введем в рассмотрение функционал Ляпунова

$$I = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EF \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 + w'v' \right)^2 + \mu (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + EJ (w'')^2 + J_0 (\dot{w})^2 - P (w')^2 - m_* U^2 (w')^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 \right] dx. \quad (6)$$

В силу уравнений (4), (5) получим

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & - \int_0^l \left\{ -EF \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 + w'v' \right) \left[ \dot{u} + (w' + v') \dot{w} \right] - \gamma_2 \dot{u} u' + (EJw'')' \dot{w} - \right. \\ & \left. - EJw'' \dot{w}' - (J_0 \dot{w})' \dot{w} + Pw' \dot{w} + m_* U^2 \dot{w} w' + m_* U \dot{w}^2 + (\alpha_2 \dot{w}'')' \dot{w} - \alpha_2 \dot{w}' \dot{w}'' \right\} - \\ & - \int_0^l \left[ \gamma_2 (\dot{u}')^2 + \gamma_1 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \dot{P} (w')^2 + m_* U \dot{U} (w')^2 + m_* U \dot{w}' \dot{w} + \alpha_2 (\dot{w}'')^2 + \alpha_1 \dot{w}^2 + \right. \\ & \left. + H^*(u, \dot{u}, x, t) \dot{u} + G^*(w, \dot{w}, x, t) \dot{w} - f(x, t) \dot{u} - g(x, t) \dot{w} \right] dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Имеют место следующие неравенства [16]

$$\int_0^l w'^2(x, t) dx \leq \xi \int_0^l w''^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w^2(x, t) dx \leq \eta \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (8)$$

$$\int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx \leq \theta \int_0^l (\dot{w}'')^2 dx, \quad (9)$$

$$w^2(x, t) \leq \zeta \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad u^2(x, t) \leq \psi \int_0^l u'^2(x, t) dx, \quad (10)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ ,  $\psi$  – некоторые постоянные.

Предположим, что концы трубопровода закреплены жестко (тогда на концах  $w = w' = 0$ ) или шарнирно (тогда  $w = w'' = 0$ ). Предполагая также  $f = g = 0$ , согласно (7), (9) получим

$$\frac{dI}{dt} \leq - \int_0^l \left[ \gamma_2 (\dot{u}')^2 + \gamma_1 \dot{u}^2 + \left( \frac{1}{2} \dot{P} + m_* U \dot{U} \right) (w')^2 + m_* \dot{U} w' \dot{w} + \left( \alpha_1 + \min \frac{\alpha_2}{\theta} \right) \dot{w}^2 + H^*(u, \dot{u}, x, t) \dot{u} + G^*(w, \dot{w}, x, t) \dot{w} \right] dx.$$

Пусть для всех  $x, t$  будут выполнены условия

$$H^* \dot{u} + G^* \dot{w} \geq 0, \quad 2 \left( \alpha_1 + \min \frac{\alpha_2}{\theta} \right) (\dot{P} + 2m_* U \dot{U}) \geq m_*^2 \dot{U}^2. \quad (11)$$

Тогда  $\frac{dI}{dt} \leq 0$ ,  $I(t) \leq I(0)$ , и с учетом (8) будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EJ \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 + w' v' \right)^2 + \mu (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\xi} \min(EJ) - P - m_* U^2 \right) (w')^2 + J_0 (\dot{w}')^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 \right] dx \leq I(t) \leq I(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Из неравенства (12) при выполнении (для всех  $x, t$ ) условия

$$P \leq \frac{1}{\xi} \min(EJ) - m_* U^2 \quad (13)$$

следует теорема:

**Теорема.** Если выполнены условия (11), (13), то имеет место устойчивость по Ляпунову решений начально-краевых задач для функций  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  и их производных  $\dot{u}(x, t)$ ,  $\dot{w}(x, t)$ ,  $u'(x, t)$ ,  $w'(x, t)$ ,  $\dot{w}'(x, t)$  (по отношению к возмущениям нулевых начальных данных  $u(x, 0)$ ,  $w(x, 0)$ ,  $\dot{u}(x, 0)$ ,  $\dot{w}(x, 0)$ ,  $u'(x, 0)$ ,  $w'(x, 0)$ ,  $w''(x, 0)$ ,  $\dot{w}'(x, 0)$ ).

Физический смысл этой теоремы состоит в том, что при выполнении условий (11), (13) невозмущенное состояние предварительно изогнутого стержня является динамически устойчивым.

Используя неравенства (10), несложно получить оценки значений деформаций  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$ , выражающиеся через начальные данные  $u(x, 0)$ ,  $w(x, 0)$ ,  $\dot{u}(x, 0)$ ,  $\dot{w}(x, 0)$ ,  $u'(x, 0)$ ,  $w'(x, 0)$ ,  $w''(x, 0)$ ,  $\dot{w}'(x, 0)$  [17].

Таким образом, в статье представлен вывод системы уравнений, описывающих продольно-поперечные колебания предварительно изогнутого стержня в случае переменных характеристик механической системы (трубопровода и внешних связей). На основе функционала Ляпунова, построенного для этой системы, получены условия динамической устойчивости трубопровода, налагающие ограничения на параметры механической системы (продольной силы, скорости и плотности жидкости, изгибной жесткости трубопровода, коэффициенты демпфирования).

### Список литературы

1. Paidoussis M.P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics // Journal

- of Sound and Vibration. 2008, vol. 310(3), pp. 462-492. DOI: doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065.
2. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. 2016, vol. 63, pp. 120-139. DOI: doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002.
  3. Giacobbi D., Semler C. and Paidoussis M.P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020, vol. 473, p. 115202. DOI: doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202.
  4. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011, vol. 14, pp. 2986-2993. DOI: doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376.
  5. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement. 2009, pp. 424-432. DOI: doi.org/10.3934/proc.2009.2009.424.
  6. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. Fluid structure interaction problem with changing thickness non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2011, pp. 813-823.
  7. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. S. 2014, vol. 7, no. 6, pp. 1133-1148. DOI: doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133.
  8. Амирова Р.М., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Изгиб длинного трубопровода, находящегося в сильно вязкой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. – 2005. – № 67. – С. 5-11. – doi.org/10.32326/1814-9146-2005-67-1-84-90.
  9. Chehrehghani M., Misra A.K. and Paidoussis M.P. Dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid and partially subjected to a confined counter-current external axial flow of a different fluid // Journal of Sound and Vibration. 2024, vol. 590, p. 118574. DOI: 10.1016/j.jsv.2024.118574.
  10. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – 152 с.
  11. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. – Ульяновск: УлГТУ, 2019. – 201 с.
  12. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Алексанин Н.Д., Нуруллин Н.И. Исследование устойчивости изгибно-крутильных колебаний трубопровода // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2021. – №1(93). – С. 28-31.
  13. Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А., Покладова Ю.В. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. – 2021. – Т. 23, №1. – С. 72-81. – DOI: 10.15507/2079-6900.23.202101.72-81.
  14. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1960. – 559 с.
  15. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
  16. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
  17. Вельмисов П.А., Анкилов А.В. Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-

математические науки». – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 96-115. – DOI: 10.14498/vsgtu1588.

### References

1. Paidoussis M.P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics // *Journal of Sound and Vibration*. 2008, vol. 310(3), pp. 462-492. DOI: doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.065.
2. Mditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2016, vol. 63, pp. 120-139. DOI: doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002.
3. Giacobbi D., Semler C. and Paidoussis M.P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // *Journal of Sound and Vibration*. 2020, vol. 473, p. 115202. DOI: doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202.
4. Faal R.T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // *Procedia Engineering*. 2011, vol. 14, pp. 2986-2993. DOI: doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376.
5. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P.A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam // *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement*. 2009, pp. 424-432. DOI: doi.org/10.3934/proc.2009.2009.424.
6. Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. Fluid structure interaction problem with changing thickness non-linear beam // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2011, pp. 813-823.
7. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. S*. 2014, vol. 7, no. 6, pp. 1133-1148. DOI: doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133.
8. Amirova R.M., Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Bending of a long pipeline located in a highly viscous liquid // *Problems of Strength and Plasticity*. 2005, no. 67, pp. 5-11. doi.org/10.32326/1814-9146-2005-67-1-84-90.
9. Chehreghani M., Misra A.K. and Paidoussis M.P. Dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid and partially subjected to a confined counter-current external axial flow of a different fluid // *Journal of Sound and Vibration*. 2024, vol. 590, p. 118574. DOI: 10.1016/j.jsv.2024.118574.
10. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems. – Ulyanovsk: USTU, 2018. – 152 p.
11. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Lyapunov functionals in some problems of aerohydroelasticity. – Ulyanovsk: USTU, 2019. – 201 p.
12. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A., Aleksanin N.D., Nurullin N.I. Study of the stability of bending-torsional vibrations of a pipeline // *Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University*. 2021, no. 1(93), pp. 28-31.
13. Velmisov P.A., Tamarova Yu.A., Pokladova Yu.V. Study of dynamic stability of bending-torsional deformations of a pipeline // *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2021, vol. 23, no. 1, pp. 72-81. DOI: 10.15507/2079-6900.23.202101.72-81.
14. Babakov I.M. Theory of oscillations. – M.: Science, 1960. – 559 p.
15. Schmidt G. Parametric oscillations. – M.: World, 1978. – 336 p.

16. Collatz L. Eigenvalue Problems. – M.: Science, 1968. – 503 p.
17. Velmisov P.A., Ankilov A.V. Dynamic stability of deformable structural elements under supersonic flow conditions // Bulletin of Samara State Technical University. The series "Physical and mathematical sciences". 2018, vol. 22, no. 1, pp. 96-115. DOI: 10.14498/vsgtu1588.

|                                                                                                                         |                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Вельмисов Петр Александрович</b> – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики | <b>Velmisov Petr Aleksandrovich</b> – doctor of physical and mathematical Sciences, professor, professor of the Department of higher mathematics |
| <b>Тамарова Юлия Александровна</b> – соискатель                                                                         | <b>Tamarova Yuliya Aleksandrovna</b> – applicant                                                                                                 |
| <b>Абрашкин Павел Михайлович</b> – аспирант                                                                             | <b>Abrashkin Pavel Mihailovich</b> – postgraduate student                                                                                        |
| <b>Ликанин Алексей Викторович</b> – аспирант                                                                            | <b>Likanin Aleksej Viktorovich</b> – postgraduate student                                                                                        |
| kazakovau@mail.ru                                                                                                       |                                                                                                                                                  |

*Received 20.02.2025*