

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-43-42-54>

## РОБАСТНОЕ СЛЕДЯЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА МЕТОДОМ «ГЛУБОКОЙ» ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

*Нимирич Н.С., Филимонов Н.Б.*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва,  
Россия*

**Ключевые слова:** квадрокоптер, синтез алгоритма робастного следящего управления, метод «глубокой» обратной связи, компьютерная апробация алгоритма управления.

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза алгоритма робастного следящего управления движением квадрокоптера (КК) в условиях параметрической неопределенности модели его динамики. Синтез алгоритма следящего управления КК основан на принципе «глубокой» обратной связи с использованием большого коэффициента усиления. Эффективность синтезированного алгоритма управления подтверждена компьютерной апробацией в среде Python и сравнением с алгоритмами управления, основанными на широко распространенных современных методах нелинейного управления: скользящих режимов, обхода интегратора и линеаризации обратной связью.

## ROBUST TRACKING MOTION CONTROL OF THE QUADCOPTER BASED ON THE METHOD OF «DEEP» FEEDBACK

*Nimirich N.S., Filimonov N.B.*

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

**Keywords:** quadcopter, synthesis of the robust tracking control algorithm, the method of «deep» feedback, computer testing of the control algorithm.

**Abstract.** The problem of synthesizing an algorithm of robust tracking control of motion a quadcopter (QC) under conditions of parametric uncertainty of its dynamics model is considered. The synthesis of the QC tracking control algorithm is based on the method of «deep» feedback using a large gain coefficient. The effectiveness of the synthesized control algorithm is confirmed by computer testing in the Python environment and comparison with control algorithms based on widely used modern methods of nonlinear control: sliding modes, integrator bypass and feedback linearization.

Одним из прогрессивных видов беспилотных летательных аппаратов, набирающих все большую популярность и приобретающих все более широкое применение в гражданской и военной сферах, являются мультикоптеры и, в частности, *квадрокоптеры* (КК). Основными преимуществами КК является компактность, простота конструкции, относительно невысокая стоимость, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки и высокая маневренность со способностью вертикального взлета, посадки, движения в любую сторону и зависания на месте.

Современный КК – высокоманевренный беспилотный летательный аппарат вертолетного типа с четырьмя симметрично расположенными несущими воздушными винтами (пропеллерами), вращающимися диагонально в противоположных направлениях и создающими тягу,

обеспечивающую управление движением аппарата путем изменения скорости вращения каждого винта. При этом одним из перспективных путей повышения эффективности применения КК является совершенствование алгоритмов управления его движением.

Несмотря на наличие многочисленных методов синтеза алгоритмов управления движением КК, многие из них оказываются малоэффективными в условиях *априорной неопределенности*, обусловленной неточностями математического описания и действием параметрических возмущений. В связи с этим все большую актуальность приобретает проблема разработки *робастных алгоритмов управления движением КК*, способных обеспечить слабую чувствительность его динамических характеристик (устойчивость и качество процессов управления) к изменению параметров математической модели в условиях параметрических возмущений [1]. В настоящей работе рассматривается задача синтеза алгоритма робастного следящего управления движением КК на основе метода «глубокой» обратной связи (ГОС). Эффективность синтезированного алгоритма управления подтверждается компьютерной апробацией в среде Python и сравнением с алгоритмами управления, основанными на широко распространенных современных методах нелинейного управления: методе скользящих режимов, методе обхода интегратора, методе линеаризация обратной связью.

### Математическая модель движения КК

КК рассматривается как абсолютно жесткая осесимметричная система с шестью степенями свободы, соответствующих поступательному и вращательному движениям аппарата. Схематичное изображение и геометрическая модель КК представлены на рисунке 1.

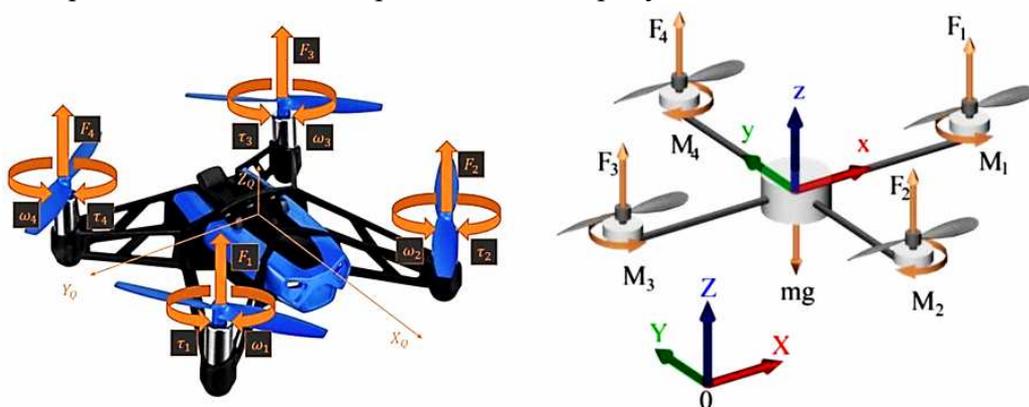


Рис. 1. Схематичное изображение и геометрическая модель КК

**Каждый несущий винт**, совершая вращение, создает силу тяги и угловой момент, обеспечивая подъем и маневрирование КК, а также создает аэродинамический момент, направленный в противоположном направлении вращения винта.

Обзор математических моделей динамики КК, приведен в [2]. В настоящей работе в качестве переменных состояния КК выбраны его

пространственные и угловые координаты вместе с их производными, а в качестве математической модели пространственного движения принята следующая система дифференциальных уравнений Ньютона-Эйлера, описывающих объединенную поступательную (1) и вращательную (2) динамику аппарата с учетом аэродинамического сопротивления:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi)]}{m} - \frac{k_x}{m} \dot{x}, \\ \ddot{y} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cos(\psi)]}{m} - \frac{k_y}{m} \dot{y}, \\ \ddot{z} = \frac{u_z [\cos(\varphi) \cos(\theta)]}{m} - \frac{k_z}{m} \dot{z} - g, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{u_\varphi}{I_x} + \frac{(I_y - I_z)}{I_x} \dot{\psi} \dot{\theta} - \frac{I\Omega}{I_x} \dot{\theta} - \frac{k_\varphi}{I_x} \dot{\varphi}^2, \\ \ddot{\theta} = \frac{u_\theta}{I_y} + \frac{(I_z - I_x)}{I_y} \dot{\psi} \dot{\varphi} - \frac{I\Omega}{I_y} \dot{\varphi} - \frac{k_\theta}{I_y} \dot{\theta}^2, \\ \ddot{\psi} = \frac{u_\psi}{I_z} + \frac{(I_x - I_y)}{I_z} \dot{\theta} \dot{\varphi} - \frac{k_\psi}{I_z} \dot{\psi}^2, \end{cases} \quad (2)$$

где,  $m$  – масса аппарата;  $I$  – сумма моментов инерций винтов относительно оси  $z$ ;  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции винтов относительно соответствующих осей, причем  $I_x = I_z$ ;  $k_x, k_y, k_z$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления перемещению;  $k_\varphi, k_\theta, k_\psi$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления вращению;  $\varphi, \theta, \psi$  – углы крена, тангажа и рысканья, а  $x, y, z$  – координаты центра масс аппарата,  $\Omega = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i$  – суммарная угловая

скорость вращения всех четырех винтов,  $\omega_i$  – угловая скорость вращения  $i$ -го винта;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;  $u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi$  – четыре управляющих воздействия (общая тяга и три крутящих момента), обеспечивающие соответственно подъем, спуск и повороты аппарата вокруг своих осей.

Таким образом, КК, как объект управления, представляет собой 12-мерную стационарную систему (1), (2), входом, выходом и состоянием которой являются соответственно следующие векторы  $\mathbf{u}, \mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T, \quad \mathbf{y} = (x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T, \\ x_1 &= z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad x_3 = x, \quad x_4 = \dot{x}, \quad x_5 = y, \quad x_6 = \dot{y}, \\ x_7 &= \varphi, \quad x_8 = \dot{\varphi}, \quad x_9 = \theta, \quad x_{10} = \dot{\theta}, \quad x_{11} = \psi, \quad x_{12} = \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Суммарная тяга  $T$ , образованные всеми четырьмя винтами:

$$T = (u_x^2 + u_y^2 + (u_z + mg)^2)^{1/2},$$

и крутящие моменты  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_\theta$ ,  $\tau_\psi$ , обеспечивающие маневры КК, прямо пропорциональны квадратам угловых скоростей вращения винтов  $\omega_i, i = \overline{1,4}$ :

$$\begin{pmatrix} u_z \\ u_\varphi \\ u_\theta \\ u_\psi \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T \\ \tau_\varphi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_p & k_p & k_p & k_p \\ 0 & -lk_p & 0 & lk_p \\ -lk_p & 0 & lk_p & 0 \\ k_d & -k_d & k_d & -k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{pmatrix},$$

где  $k_p, k_d$  – коэффициент тяги и моментный коэффициент соответственно;  $l$  – одинаковое расстояние между центром масс и осями винтов.

### Постановка задачи синтеза следящего управления движением КК

Сформулируем задачу синтеза следящего управления КК: для управляемого беспилотника с уравнениями динамики (1), (2) требуется синтезировать управляющий вектор  $\mathbf{u} = (u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T$ , обеспечивающий в процессе полета отслеживание вектором управляемых выходных переменных  $\mathbf{y} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi)^T$  его произвольно заданного (программного) изменения  $\mathbf{y}_d(t) = (x_d(t), y_d(t), z_d(t), \varphi_d(t), \theta_d(t), \psi_d(t))^T$ , т.е. выполнение целевого условия следящего управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{e}(t)| = 0, \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t). \quad (3)$$

Контур слежения КК состоит из подсистем поступательного (1) и вращательного (2) движений, причем в силу четырехмерности вектора входных переменных  $\mathbf{u}$ , лишь четыре задающих воздействия являются независимыми: например, это переменная  $z_d(t)$ , определяющая заданное эталонное изменение высоты аппарата при управлении подсистемой (1) и три переменные  $\varphi_d(t), \theta_d(t), \psi_d(t)$ , определяющие заданное эталонное изменение углов крена, тангажа и рыскания аппарата при управлении подсистемой (2) При этом остальные задающие воздействия  $x_d(t)$  и  $y_d(t)$  будут сормированы автоматически.

Полагаем, что сформулированная задача управления КК рассматривается как *задача робастного следящего управления* в условиях априорной неопределенности математической модели динамики аппарата, вызванной параметрическими возмущениями ее параметров. В качестве показателей эффективности синтезированного следящего управления движением КК полагаем, во-первых, прямые показатели качества (перерегулирование и время регулирования), характеризующие склонность к колебаниям и быстродействие процесса управления и, во-вторых, амплитуду входных управляющих воздействий, характеризующую энергозатраты на выработку управляющих воздействий.

Блок-схема синтезируемой системы следящего управления движением КК представлена на рисунке 2. Здесь на вход системы подается вектор задающего воздействия  $\mathbf{y}_d(t)$  (уставка), определяющего желаемое

(требуемое) изменение текущего выходного управляемого вектора  $y(t)$  аппарата. В результате сравнения данных векторов вычисляется ошибка управления  $e(t)$  (сигнал рассогласования), на основании которой полетный контроллер системы управления формирует управляющий вектор  $u(t)$ , обеспечивающий в процессе полета выполнение целевого условия (3).

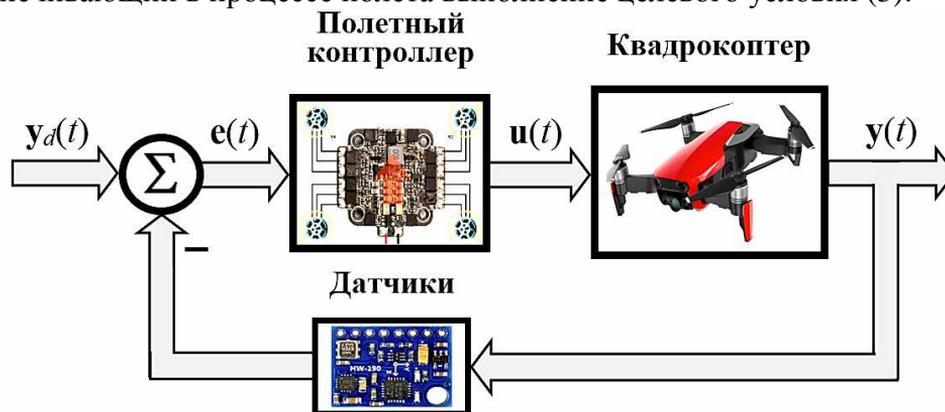


Рис. 2. Блок-схема системы следящего управления КК

### Синтез алгоритма следящего управления движением КК методом «глубокой» обратной связи

К настоящему времени достигнут значительный прогресс в системах управления движением КК. Перечень применяемых подходов, включает как классические, так и современные методы автоматического управления, достоинства и недостатки которых представлены в обзорах [3, 4].

Среди методов решения задачи робастного управления динамическими объектами следует выделить методы синтеза на основе робастных и интервальных критериев устойчивости, а также методы синтеза:  $QFT$ ,  $LQ$ ,  $LMI$ ,  $\mu$ ,  $l_1$ ,  $H_2$ ,  $H_\infty$ . Однако, данные методы не получили широкого применения на практике, поскольку обеспечивают системе управления робастность лишь свойства асимптотической устойчивости и не учитывают робастность свойства качества процессов управления. Альтернативный метод синтеза робастных систем управления основан на использовании *метода ГОС* [5], выдвинутого в работах Блэка (H.S. Black), Найквиста (H. Nyquist) и Боде (H.W. Bode) в конце 20-х годов XX столетия. Данный метод получил развитие в виде комбинации *метода больших коэффициентов усиления* [6] и *метода управления по высшей производной* [7] в работах М.В. Меерова, Грина (W.G. Green), Хэдда (R. Haddad), Г.С. Поспелова, Я.З. Цыпкина, А.С. Вострикова, В.В. Панкратова, П.Д. Крутько и др. «Глубокой» принято называть обратную связь, при которой с увеличением коэффициента усиления прямой цепи свойства замкнутого контура определяются в основном оператором обратной связи. Применение метода ГОС в задачах робастного управления динамическими объектами с параметрической неопределенностью обеспечивает системе управления, во-первых, желаемую динамику и, во-вторых, свойство инвариантности к параметрическим возмущениям.

Изложим вкратце метод ГОС [6, 7] для синтеза алгоритма управления нелинейным нестационарным одноканальным динамическим объектом управления  $n$ -го порядка, описываемым аффинным дифференциальным уравнением вида

$$y^{(n)} + f(t, \mathbf{x}) = b(t, \mathbf{x})u, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x} = (y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})$  – вектор состояния объекта, а  $y$  – его скалярная управляемая переменная;  $f(t, \mathbf{x})$ ,  $b(t, \mathbf{x})$  – некоторые нелинейные нестационарные функции, явная зависимость которых от времени  $t$  отражает действие возмущений, которые могут быть порождены как нестационарностью характеристик самого объекта, так и действием сигнальных возмущений.

Положим, что задача синтеза алгоритма управления объектом (4) заключается в нахождении управляющего воздействия:

$$u = u(\cdot), \quad (5)$$

обеспечивающего в замкнутой системе управления (4), (5) заданное желаемое (эталонное) движение, определяемое уравнением вида:

$$y^{(n)} + G(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (6)$$

где  $G(t, \mathbf{x})$  – нелинейная нестационарная функция.

Следуя основной идеи метода ГОС, комбинирующей в обратной связи большой коэффициент усиления и высшую производную, примем искомый закон управления (5) в виде:

$$u = u(t, \mathbf{x}, y^{(n)}) = -K(G(t, \mathbf{x}) + y^{(n)}). \quad (7)$$

Тогда уравнение замкнутой системы (4), (7) принимает вид:

$$y^{(n)} + f(t, \mathbf{x}) + Kb(t, \mathbf{x})(G(t, \mathbf{x}) + y^{(n)}) = 0, \quad (8)$$

и, следовательно, динамика синтезированной системы подчиняется следующему уравнению:

$$y^{(n)} + \frac{Kb(t, \mathbf{x})}{1 + Kb(t, \mathbf{x})}G(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{1 + Kb(t, \mathbf{x})}f(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда, в пределе при  $K \rightarrow \infty$ , получаем желаемое движение (6) синтезированной системы управления.

Отметим оригинальную особенность закона управления (7): он предполагает знание только лишь динамического порядка объекта управления и обеспечивает системе управления *свойство инвариантности по отношению к динамическим характеристикам объекта, включая его параметрические возмущения*.

Обратимся к задаче синтеза алгоритма следящего управления движением КК методом ГОС: для управляемого беспилотника с уравнениями динамики (1), (2) и с вектором состояния  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T$  требуется синтезировать управляющий вектор  $\mathbf{u} = (u_z, u_x, u_y, u_\varphi, u_\theta, u_\psi)^T$ , обеспечивающий воспроизведение вектором выходных переменных

$\mathbf{y} = (x, y, z, \varphi, \theta, \psi)^T$  заданного вектора  $\mathbf{y}_d = (x_d, y_d, z_d, \varphi_d, \theta_d, \psi_d)^T$ , т.е. выполнение следующего целевого условия следящего управления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{e}(t)| = 0, \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t).$$

Следуя изложенному методу ГОС, нетрудно синтезировать алгоритм следящего управления движением КК в виде:

$$u_i(\mathbf{x}) = -K_i(G_i(\mathbf{x}) + \ddot{y}_i), \quad i = \overline{1, 6}, \quad (9)$$

где  $G_i(\mathbf{x})$  желаемый закон изменения  $i$ -й ошибки управления  $e_i(\mathbf{x})$  при обработке системой заданных управляемых переменных:

$$G_i(\mathbf{x}) = \ddot{e}_i(\mathbf{x}) + k_{2i-1}\dot{e}_i(\mathbf{x}) + k_{2i}e_i(\mathbf{x}), \quad e_i(\mathbf{x}) = y_i - y_{i_d}, \quad i = \overline{1, 6}. \quad (10)$$

При этом получены следующие коэффициенты алгоритма:

$$\begin{aligned} k_1 = 0,16; k_2 = 0,11; k_3 = 0,09; k_4 = 0,04; k_5 = 0,09; k_6 = 0,04; \\ k_7 = 2,46; k_8 = 9,88; k_9 = 2,46; k_{10} = 9,88; k_{11} = 0,95; k_{12} = 1,13; \\ K_1 = K_z = K_2 = K_x = K_3 = K_y = K_4 = K_\varphi = K_5 = K_\theta = K_6 = K_\psi = 500. \end{aligned}$$

При исследовании эффективности синтезированного алгоритма (9), (10) управления движением КК помимо компьютерной апробации представляет интерес его сравнение с алгоритмами управления, основанными на современных методах нелинейного управления, например, на следующих трех методах [8]: методе скользящих режимов, методе обход интегратора и методе линеаризации обратной связью.

### Алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом скользящих режимов

*Метод скользящих режимов* (СК) [8, п.14.1] основан на преднамеренной организации в системе скользящих режимов по «притягивающей» гиперплоскости, по которой система «скользит» к желаемой целевой точке. Можно показать, что алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом СК имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{m}{\cos(x_7) \cos(x_9)} \left( \ddot{z}_d + \frac{k_z}{m} x_2 + c_1 \dot{e}_1 + \frac{k_1 s_1}{(|s_1| + \varepsilon_1)} \right), \\ u_x &= \frac{m}{T} \left( \ddot{x}_d + \frac{k_x}{m} x_4 + c_2 \dot{e}_2 + \frac{k_2 s_2}{(|s_2| + \varepsilon_2)} \right), \\ u_y &= \frac{m}{T} \left( \ddot{y}_d + \frac{k_y}{m} x_6 + c_3 \dot{e}_3 + \frac{k_3 s_3}{(|s_3| + \varepsilon_3)} \right), \\ u_\psi &= I_z (\ddot{\psi}_d - \frac{(I_x - I_y)}{I_z} x_8 x_{10} + \frac{k_\psi}{I_z} x_{12}^2 + c_4 \dot{e}_4 + \frac{k_4 s_4}{(|s_4| + \varepsilon_4)}), \\ u_\varphi &= I_x (\ddot{\varphi}_d - \frac{(I_y - I_z)}{I_x} x_{10} x_{12} + \frac{I\Omega}{I_x} x_{10} + \frac{k_\varphi}{I_x} x_8^2 + c_5 \dot{e}_5 + \frac{k_5 s_5}{(|s_5| + \varepsilon_5)}), \\ u_\theta &= I_y (\ddot{\theta}_d - \frac{(I_z - I_x)}{I_y} x_8 x_{12} + \frac{I\Omega}{I_y} x_8 + \frac{k_\theta}{I_y} x_{10}^2 + c_6 \dot{e}_6 + \frac{k_6 s_6}{(|s_6| + \varepsilon_6)}). \end{aligned}$$

Коэффициенты алгоритма управления:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,963; k_2 = k_3 = 5; k_4 = 327; k_5 = k_6 = 804; \\ c_1 &= 0,415; c_2 = c_3 = 0,4; c_4 = 0,7; c_5 = c_6 = 21; \\ \varepsilon_1 &= 0,48; \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,3; \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0,4; \\ k_z &= k_x = k_y = k_\varphi = k_\theta = k_\psi = 500. \end{aligned}$$

### Алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом обхода интегратора

Метод обхода интегратора (ОИ) [8, п.14.3], именуемый также методом попятного синтеза или бэкстепинга, основан на декомпозиции исходной задачи управления на последовательность соответствующих подзадач меньшего порядка и на рекурсивной процедуре пошагового обхода каждого интегратора объекта. Можно показать, что алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом ОИ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{m}{\cos(x_7)\cos(x_7)} \left( \frac{k_z}{m} x_2 + \ddot{z}_d + c_1 \dot{e}_1 + e_1 - c_2 e_2 \right), \\ u_x &= \frac{m}{T} \left( \ddot{x}_d + \frac{k_x}{m} x_4 + c_3 \dot{e}_3 + e_3 - c_4 e_4 \right), \\ u_y &= \frac{m}{T} \left( \ddot{y}_d + \frac{k_y}{m} x_6 + c_5 \dot{e}_5 + e_5 - c_6 e_6 \right), \\ u_\psi &= I_z \left( \ddot{\psi}_d - \frac{(I_x - I_y)}{I_z} x_8 x_{10} + \frac{k_\psi}{I_z} x_{12}^2 + c_7 \dot{e}_7 + e_7 - c_8 e_8 \right), \\ u_\varphi &= I_x \left( \ddot{\varphi}_d - \frac{(I_y - I_z)}{I_x} x_{10} x_{12} + \frac{I\Omega}{I_x} x_{10} + \frac{k_\varphi}{I_x} x_8^2 + c_9 \dot{e}_9 + e_9 - c_{10} e_{10} \right), \\ u_\theta &= I_y \left( \ddot{\theta}_d - \frac{(I_y - I_z)}{I_x} x_{10} x_{12} + \frac{I\Omega}{I_x} x_{10} + \frac{k_\theta}{I_x} x_8^2 + c_{11} \dot{e}_{11} + e_{11} - c_{12} e_{12} \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты алгоритма управления:

$$\begin{aligned} c_1 &= 15,8; c_2 = 0,59; c_3 = 71,05; c_4 = 0,3885; c_5 = 71,05; c_6 = 0,3885; \\ c_7 &= 3955; c_8 = 0,4; c_9 = 16450; c_{10} = 3,7; c_{11} = 16450; c_{12} = 3,7. \end{aligned}$$

### Алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом линеаризации обратной связью

Метода линеаризации обратной связью (ЛОС) [8, гл.13], именуемый также методом «эквивалентной линеаризации», позволяет совершить преобразование нелинейной системы замыканием обратной связью в эквивалентную линейную систему путем замены в исходной системе переменных состояния и управляющего входа на новые. Можно показать, что алгоритм следящего управления движением КК, синтезированный методом ЛОС имеет следующий вид:

$$u_z = \frac{m}{\cos(x_7)\cos(x_7)} \left( \frac{k_z}{m} x_2 + \ddot{z}_d + k_2 \dot{e}_1 + k_1 e_1 \right),$$

$$u_x = \frac{m}{T} (\ddot{x}_d + \frac{k_x}{m} x_4 + k_4 \dot{e}_2 + k_3 e_2),$$

$$u_y = \frac{m}{T} (\ddot{y}_d + \frac{k_y}{m} x_6 + k_6 \dot{e}_3 + k_5 e_3),$$

$$u_\psi = I_z (\ddot{\Psi}_d - \frac{(I_x - I_y)}{I_z} x_8 x_{10} + \frac{k_z}{I_z} x_{12}^2 + k_8 \dot{e}_4 + k_7 e_4),$$

$$u_\phi = I_x (\ddot{\Phi}_d - \frac{(I_y - I_z)}{I_x} x_{10} x_{12} + \frac{I\Omega}{I_x} x_{10} + \frac{k_x}{I_x} x_8^2 + k_{10} \dot{e}_5 + k_9 e_5),$$

$$u_\theta = I_y (\ddot{\Theta}_d - \frac{(I_z - I_x)}{I_y} x_8 x_{12} + \frac{I\Omega}{I_y} x_8 + \frac{k_y}{I_y} x_{10}^2 + k_{12} \dot{e}_6 + k_{11} e_6).$$

Коэффициенты алгоритма управления:

$$k_1 = 14; k_2 = 18,93; k_3 = 25,95; k_4 = 62,02; k_5 = 25,95; k_6 = 62,02; \\ k_7 = 493; k_8 = 2230; k_9 = 31100; k_{10} = 17990; k_{11} = 31100; k_{12} = 17990.$$

### Компьютерная апробация алгоритма следящего управления движением КК, синтезированного методом «глубокой» обратной связи ГОС

Исследование эффективности синтезированного методом ГОС алгоритма управления движением КК проводилось в среде Python на модели динамики аппарата (1), (2) с параметрами, представленными в таблице 1.

Табл. 1. Параметры математической модели КК

$m$ , кг	$I_x$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_y$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_z$ , кг·м <sup>2</sup>	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$k_p$ , Н·с <sup>2</sup>	$k_d$ , Н·м·с <sup>2</sup>
0,65	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,98 \cdot 10^{-6}$	$3,13 \cdot 10^{-5}$
$k_x$ , Н·с/м	$k_y$ , Н·с/м	$k_z$ , Н·с/м	$k_\phi$ , кг·м <sup>2</sup> /рад	$k_\theta$ , кг·м <sup>2</sup> /рад	$k_\psi$ , кг·м <sup>2</sup> /рад	$l$ , м
$7,5 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	0,23

На рисунке 3 представлены графики сравнительного анализа переходных характеристик управляемых переменных  $x$  и  $\theta$ , а также соответствующих управляющих воздействий  $u_x$  и  $u_\theta$  системы следящего управления движением КК, синтезированной методами ГОС (графики выделены сплошными линиями), СР (графики выделены линиями с точками), ОИ (графики выделены линиями с крестиками) и ЛОС (графики выделены штриховыми линиями), в условиях отсутствия параметрических возмущений модели динамики аппарата. На рисунках 4-7 представлены графики с результатами этого же сравнительного анализа системы следящего управления движением КК, синтезированной методами ГОС (рис. 4), СР (рис. 5), ОИ (рис. 6) и ЛОС (рис. 7), но теперь уже при наличии параметрических возмущений ключевого параметра модели аппарата – массы  $m$ , лежащей в диапазонах:  $[-30\%, +30\%]$  (на графиках соответствующие кривые выделены

штриховыми линиями) и  $[-50\%, +50\%]$  (на графиках соответствующие кривые выделены линиями с точками) от ее номинального невозмущенного значения, выделенного на графиках сплошными линиями.

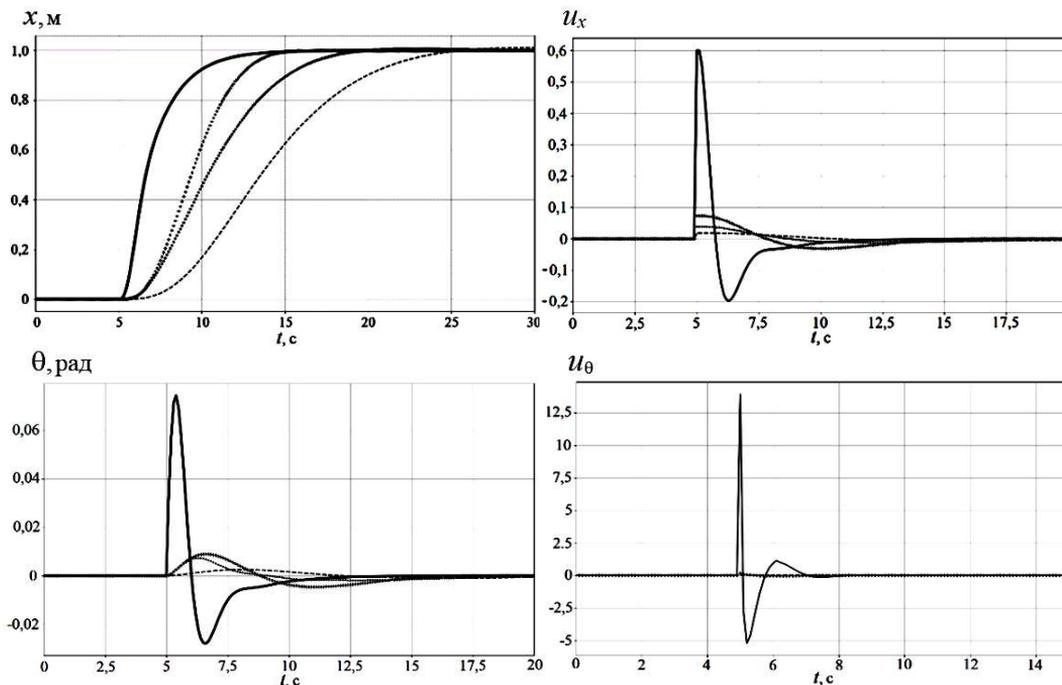


Рис. 3. Графики сравнительного анализа переходных характеристик

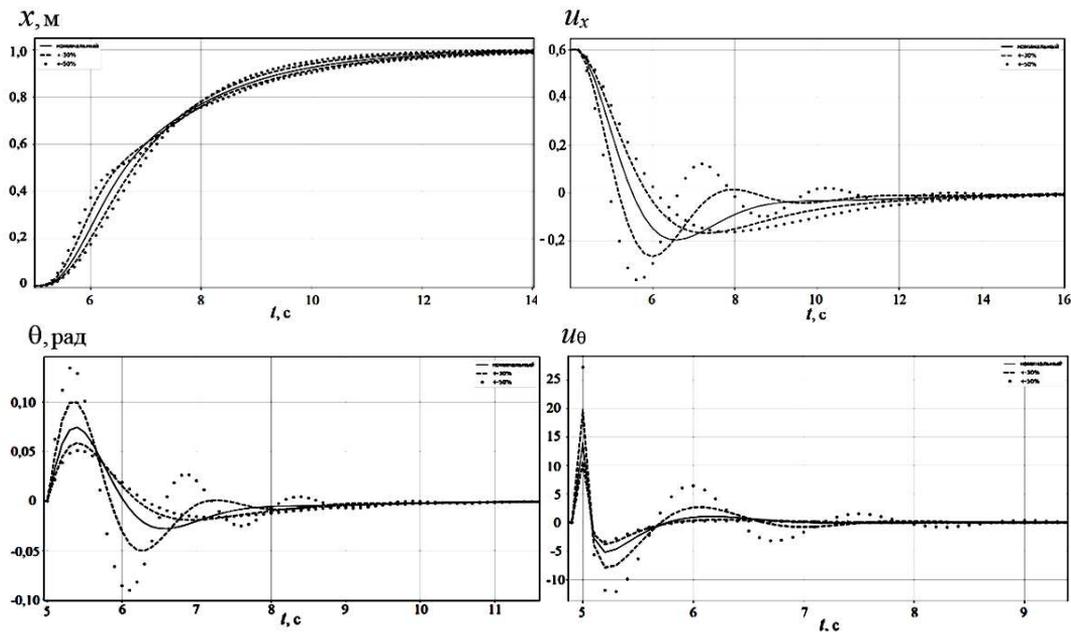


Рис. 4. Результаты сравнительного анализа системы следящего управления движением КК, синтезированной методами ГОС

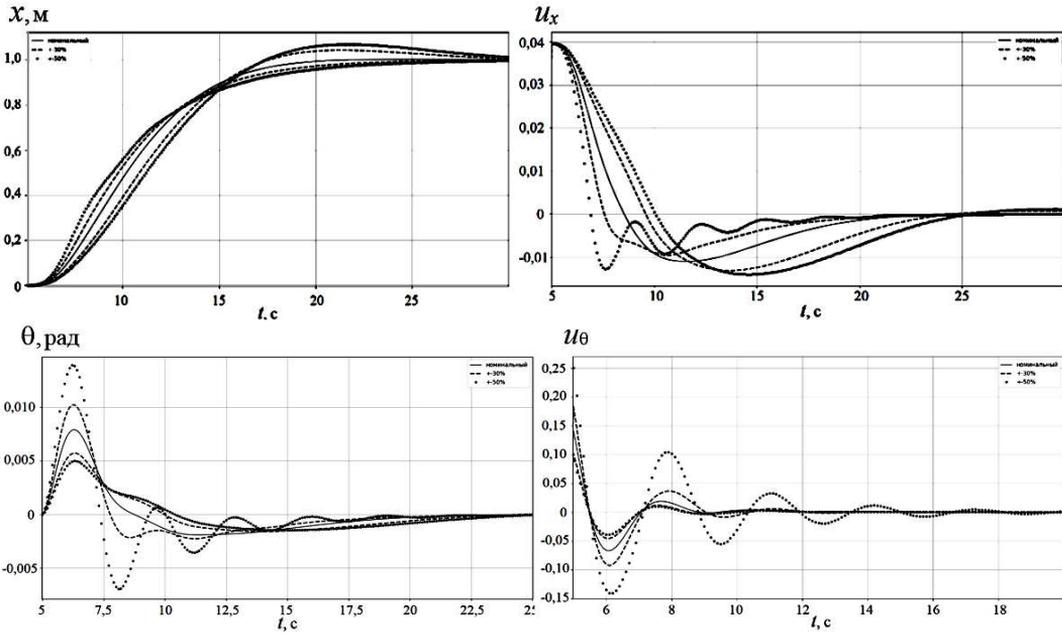


Рис. 5. Результаты сравнительного анализа системы следящего управления движением КК, синтезированной методами СР

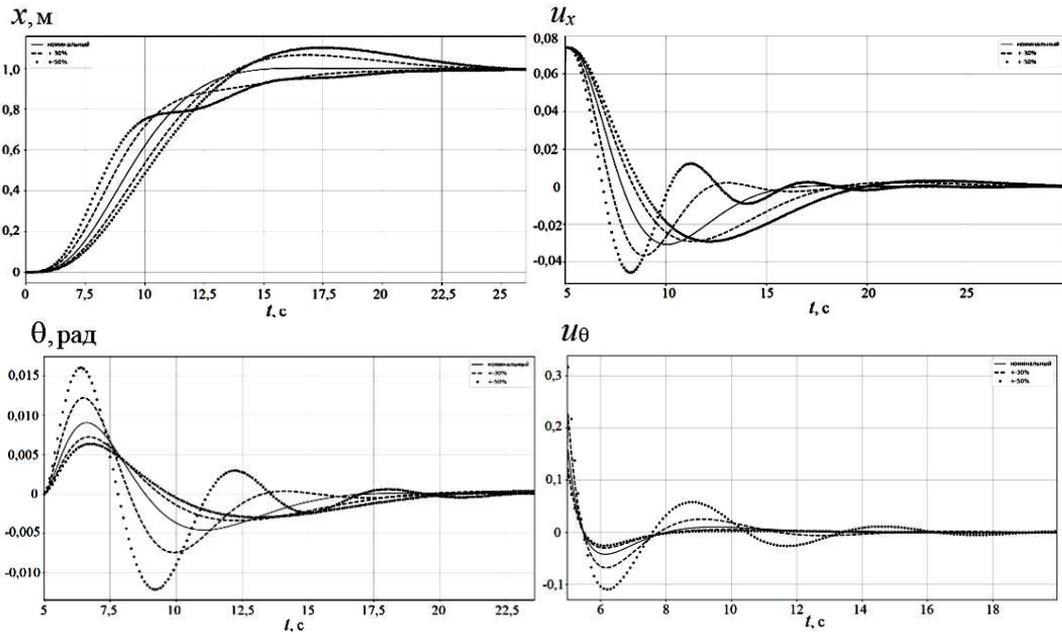


Рис. 6. Результаты сравнительного анализа системы следящего управления движением КК, синтезированной методами ОИ

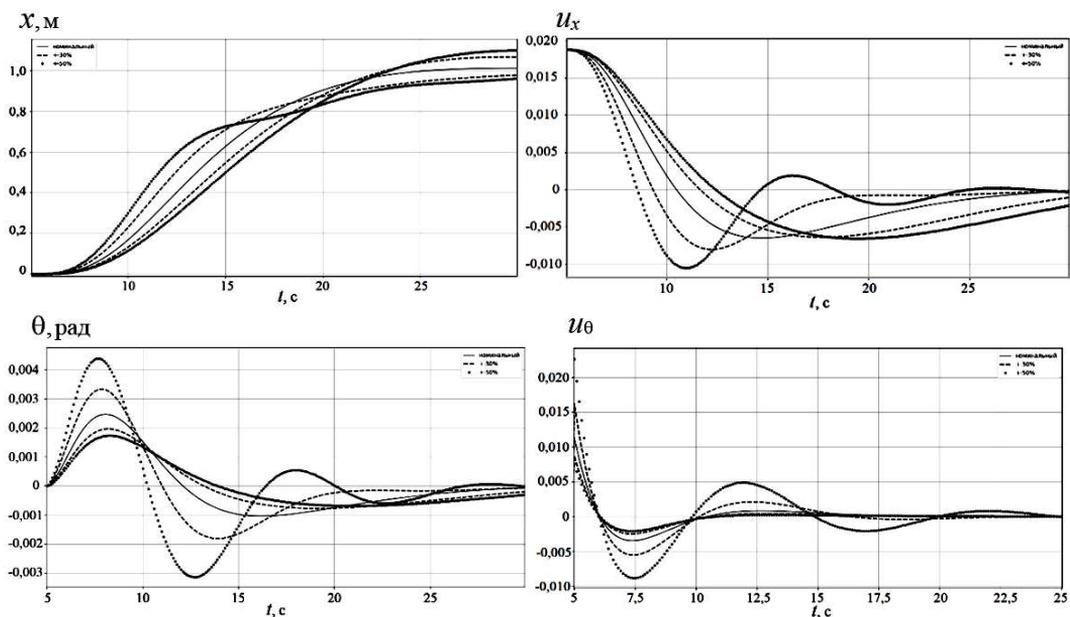


Рис. 7. Результаты сравнительного анализа системы следящего управления движением КК, синтезированной методами ЛОС

Результаты компьютерного моделирования показывают высокую эффективность синтезированного методом ГОС алгоритма следящего управления КК, превышая показатели качества и параметрической робастности процесса управления в сравнении с алгоритмами управления, синтезированными методами СР, ОИ и ЛОС. При этом очевидным преимуществом алгоритма на основе метода ГОС является возможность управления движением КК без априорной информации о параметрах его динамической модели. Однако, следует констатировать, что несмотря на простоту и универсальность метода ГОС, до сих пор остаются открытыми вопросы его теоретического обоснования и анализа истинных возможностей [6].

### Список литературы

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления: уч. пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 500 с.
2. Chovancova A., Fico T., Chovanec L., Hubinsk P. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a survey) // Procedia Engineering. 2014, vol. 96, P. 172-181.
3. Аполлонов Д.В., Бибилова К.И., Шibaев В.М., Ефимова И.Е. Формирование алгоритмов системы автоматического управления преобразуемого беспилотного летательного аппарата // Труды МАИ. – 2022. – № 122. – DOI: 10.34759/trd-2022-122-23.
4. Idrissi M., Salami M., Annaz F. A Review of Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles: Applications, Architectural Design and Control Algorithms // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2022, vol. 104, p. 22.

5. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352 с.
6. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б. Метод больших коэффициентов усиления и эффект локализации движений в задачах синтеза систем автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. – № 2. – С. 2-10.
7. Востриков А.С. Синтез систем регулирования методом локализации. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 252 с.
8. Халил Х.К. Нелинейные системы. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2009. – 832 с.

### References

1. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. Mathematical Theory of Automatic Control: textbook. – М.: LENAND, 2019. – 500 p.
2. Chovancova A., Fico T., Chovanec L., Hubinsk P. Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor (a Survey) // Procedia Engineering. 2014, vol. 96, pp. 172-181.
3. Apollonov D.V., Bibikova K.I., Shibaev V.M., Efimova I.E. Creation of Algorithms for the Automatic Control System of the Convertible Unmanned Aerial Vehicle // Proceedings of MAI. 2022, no. 122. DOI: 10.34759/trd-2022-122-23
4. Idrissi M., Salami M., Annaz F. A Review of Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles: Applications, Architectural Design and Control Algorithms // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2022, vol. 104, p. 22.
5. Emelyanov S.V., Korovin S.K. New Types of Feedback: Control under Uncertainty. – М.: Science. Fizmatlit, 1997. – 352 p.
6. Filimonov A.B., Filimonov N.B. Method of Major Amplification Factors and the Effect of Localization of Movements in the Problems of Design of Automatic Control Systems // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2009, no. 2, pp. 2-10.
7. Vostrikov A.S. Synthesis of Control Systems by Localization Method. – Novosibirsk: NSTU Publ. house, 2007. – 252 p.
8. Khalil H.K. Nonlinear systems. – М.-Izhevsk: SIC «Regular and dynamic dynamics», Institute of Computer Research, 2009. – 832 p.

<b>Нимирич Николай Сергеевич</b> – студент	<b>Nimirich Nickolay Sergeevich</b> – student
<b>Филимонов Николай Борисович</b> – доктор технических наук, профессор	<b>Filimonov Nikolay Borisovich</b> – doctor of technical sciences, professor
nbfilimonov@mail.ru	

*Received 16.09.2024*