https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-43-17-21

ОЧЕРК О НАИМЕНЬШЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПРИНУЖДЕНИИ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Бохонский А.И.[1], Варминская Н.И.[2], Рыжков А.И.[1]
[1]Севастопольский государственный университет;
[2]Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова, Севастополь, Россия

Ключевые слова: вариационное исчисление, полная обратная задача, реверсионное конструирование, принцип Гаусса, принцип наименьшего энергетического принуждения.

Аннотация. При анализе алгоритма оптимального реверсионного конструирования управлений (переносных ускорений) с использованием отдаленной аналогии с принципом наименьшего принуждения К.Ф. Гаусса осуществлена попытка обосновать и сформулировать принцип наименьшего энергетического принуждения, подтверждающего существование тенденции к снижению энергоемкости конструируемых управлений. Принцип иллюстрируется при сравнении примеров с различным степенями полинома ускорения n = 1 (классический случай) и n = 3.

ESSAY ON THE LEAST ENERGY FORCE TO ACHIEVE THE PURPOSE OF AN OBJECT'S MOVEMENT

Bokhonsky A.I.[1], Varminskaya N.I.[2], Ryzhkov A.I.[1]
[1]Sevastopol State University;
[2]P.S. Nakhimov Black Sea Higher Naval School, Sevastopol, Russia

Keywords: variational calculus, complete inverse problem, reversive construction, Gauss's principle, principle of least energy constraint.

Abstract. In the analysis of the algorithm of optimal reversive design of controls (transfer accelerations) using a farther analogy with the principle of least constraint of K.F. Gauss, an attempt was made to substantiate and formulate the principle of least energy constraint, confirming the existence of a tendency to reduce the energy intensity of reversal constructed controls. The principle of least energy constraint is illustrated by comparing examples with different degrees of the acceleration polynomial n = 1 (classical case) and n = 3.

Метод наименьший квадратов (К.Ф. Гаусс, 1795) и принцип наименьшего принуждения (1829 г.)

Метод наименьших квадратов предполагает собой удивительную аналогию (или совпадение) с принципом наименьшего принуждения. В действительном движении несвободной системы мера отклонения от свободного движения минимальна, т.е. сумма квадратов разности между ускорениями свободного и действительного движений минимальна [1]. Этот дифференциальный вариационный принцип механики К.Ф. Гаусс сформулировал в статье «Об одном общем законе механики» (1829 г.).

Принуждение представимо в виде

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{a}_k - \frac{\bar{F}_k}{m_k}\right)^2 \to \min,$$

где $\overline{a}_k$ – ускорение действительного несвободного движения материальной точки массы m_k; $\dfrac{\overline{F}_k}{m_k}$ – ускорение точки, если бы она была свободной.

Принцип наименьшего принуждения позволяет отличать действительное движение от возможных, совместимых со связями.

В работе А.П. Маркеева [2] приведены не только варианты различных формулировок принципа наименьшего принуждения, но и примеры решения задач механики с его применением. В этой работе дана также энергетическая трактовка принципа Гаусса. Утверждается, «что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый момент времени есть минимум, т.е. подразумевается экстремальное свойство реакций связей». Известны и другие трактовки принципа Гаусса. Как утверждает А.П. Маркеев, возможности применения принципа «раскрыты далеко не полностью».

Конструируемые управления перемещением объектов

Решению полных обратных задач вариационного исчисления (по исходной функции получение уравнения Эйлера и восстановление функционала-критерия) посвящены работы [3-6] и другие. На этом пути обоснован реверсионный принцип оптимальности (РПО), утверждающий, что конструируемой аналитической кососимметричной функции управления (переносного ускорения) соответствует уравнение Эйлера и восстанавливаемый функционал-критерий, который принимает стационарное значение [3]. Экстремум восстановленного функционала проверялся с использованием условий Якоби, Вейерштрасса, Лежандра [2-6].

При реверсионном конструировании управлений появляется возможность значительно сэкономить энергию для достижения цели движения.

В работе [5] осуществлялась попытка поиска некоторой отдаленной аналогии между сформулированным принципом наименьшего энергетического принуждения (ПНЭП) при разгоне-торможении объекта и принципом К.Ф. Гаусса.

Сравнение оптимального управляемого движения объекта с использованием реверсионно найденного управления осуществлялось с ранее известным в литературе управлением, полученным классическим вариационным методом с использованием квадратичного критерия оптимальности $J = \int_0^T U^2 dt,$ где T – общее время движения, U – управление на единицу массы (ускорение). Эффект снижения энергии для достижения цели движения с ростом степени задаваемого полинома управления по существу отражает наименьшее энергетическое принуждение. Данное явление можно показать в виде принципа наименьшего энергетического принуждения, который иллюстрирует достижение цели движения при экономии энергии

$$Э = 2\int_0^{T/2} mU_nV_n dt \to \min, \qquad n = 3,5,7,....\infty,$$

действия (по Лагранжу)

$$D = \int_0^T mV_n^2 dt \to \min, \qquad n \to \infty,$$

где n – степень полинома конструируемого управления, m – масса объекта (например, m = 1 кг),

снижении импульсов разгона $\int_0^{T/2} U_n dt,$ торможения $\int_{T/2}^{T} U_n dt,$ что сопровождается ростом значения интеграла от квадрата разности классического U_1 (при n = 1) и конструируемого управлений U_n (n = 3,5,7…)

$$П = \frac{1}{2}\int_0^T \left(U_1 - U_n\right)^2 dt \to \max, \quad n \to \infty.$$

Важно отметить свойство управлений, отражающее их асимптотическую близость с ростом степени полинома:

$$\Delta S = \int_0^T \left(U_n - U_{n-1}\right)^2 dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если в классической механике принцип наименьшего принуждения позволяет найти действительное движение среди кинематически возможных, то при реверсионном конструировании управляемого движения принцип наименьшего энергетического принуждения отражает тенденцию снижения энергии для достижения цели движения (при заданных – времени движения и максимальном перемещении), иллюстрируя энергетическое отличие конструируемого управления от известного ранее.

Приведенные выше рассуждения проиллюстрируем на примерах. Универсальные аналитические зависимости для ускорения и скорости ранее были получены в виде [3-6]:

$$U_n = \frac{L}{T^2}\left(2n+4\right)\left(\frac{T-2t}{T}\right)^n, \qquad V_n = \frac{L\left(n+2\right)}{T\left(n+1\right)}\left(1 - \left(\frac{T-2t}{T}\right)^{n+1}\right),$$

где L – общее перемещение, T – задаваемое общее время оптимального переносного движения, n – степень полинома (нечетная).

Для n = 1, m = 1 кг получим: $U_1 = \frac{6L}{T^2}\left(\frac{T-2t}{T}\right), \; V_1 = \frac{3L}{2T}\left(1 - \left(\frac{T-2t}{T}\right)^2\right).$

Действие $D_1 = \int_0^T V_1^2 dt = \frac{1,2L^2}{T}.$ Энергия $Э_1 = 2\int_0^{T/2} U_1V_1 dt = \frac{2,25L^2}{T^2}.$

Принуждение $П_1 = \frac{1}{2}\int_0^T \left(U_1 - U_1\right)^2 dt = 0.$

Для $n = 3$: $U_3 = \dfrac{10L}{T^2}\left(\dfrac{T-2t}{T}\right)^3$, $V_3 = \dfrac{5L}{4T}\left(1-\left(\dfrac{T-2t}{T}\right)^4\right)$.

Действие $D_3 = \dfrac{1{,}1111L^2}{T}$, энергия $Э_3 = \dfrac{1{,}5625L^2}{T^2}$, принуждение $П_3 = \dfrac{1{,}1428L^2}{T^3}$.

Для достаточно большой степени полинома функция управления $U_n(t)$ вызывает затруднение при практической реализации, когда фактически необходимо создать два импульса ускорения – разгона и торможения (рис. 1). Однако, при $n = 3{,}5{,}7$ для практического использования конструируемое управление естественно заменяется на эквивалентное по энергоемкости [7].

$$> n := 41; U := \frac{L\,(2\,n+4)\,(T-2\,t)^n}{T^{n+2}}; plot(\{U\}, t = 0..T);$$

$$n := 41 \quad U := 86\,(1-2\,t)^{41}$$

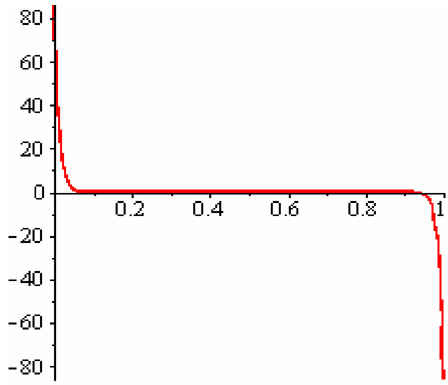

Рис. 1. График функции $U_{41}(t)$

Уменьшение энергии и действия с увеличением степени полинома ускорения приводит к возрастанию удаления избыточной энергии без нарушения цели оптимального переносного движения.

Заключение

Теоретически установлена тенденция уменьшения энергоемкости управляемого движения объекта с ростом степени полинома ускорения. Реверсионное конструирование позволяет выявить новые критерии оптимальности, с помощью которых удается решать прямые задачи их минимизации и проверить полученный результат. При $m = 1$ кг, $L = 1$ м, $T = 1$ с энергия $Э = \lim\limits_{n\to\infty} 2m\int_0^{T/2} U_n V_n\, dt = 1$ Дж.

Результаты исследований распространяются и на оптимальное вращение объекта вокруг неподвижной оси.

Список литературы

1. Гаусс К. Об одном новом общем принципе механики // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 170-172.

2. Маркеев А.П. О принципе наименьшего принуждения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.pereplet.ru/ nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
3. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2016. – 174 с.
4. Бохонский А.И. Энергоемкость управления перемещением объектов / А.И. Бохонский // Фундаментальные основы механики. – 2017. – №2. – С. 38-41.
5. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Наименьшее энергетическое принуждение при разгоне-торможении объекта // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2024. – № 4(366). – С. 27-31.
6. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Оптимальное переносное движение объектов конечной жесткости. – СПб.: Медиапапир, 2024. – 154 с.
7. Бохонский А.И., Варминская Н.И., Рыжков А.И. Снижение энергетического принуждения при эквивалентном оптимальном управлении движением объекта // Journal of advanced research in natural science. – 2022. – № 16. – С. 24-30.

References

1. Gauss K. On a new general principle of mechanics // Variational principles of mechanics. – M.: Fizmatgiz, 1959. – P. 170-172.
2. Markeev A.P. On the principle of least constraint [Electronic resource]. – Access mode: http://www. pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9801_113.pdf.
3. Bokhonsky A.I. Reversive principle of optimality. – M.: University textbook INFRA-M, 2016. – 174 p.
4. Bokhonsky A.I. Energy intensity of objects motion control // Fundamental foundations of mechanics. 2017, no. 2, pp. 38-41.
5. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. The least energy coercion during object acceleration and deceleration // Fundamental and applied problems of engineering and technology. 2024, no. 4(366), pp. 27-31.
6. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Optimal translational motion of finite rigidity objects. – SPb.: Mediapapir, 2024. – 154 p.
7. Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I., Ryzhkov A.I. Reducing the energy coercion under equivalent optimal control of the object's motion // Journal of advanced research in natural science. 2022, no. 16, pp. 24-30.

Бохонский Александр Иванович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Цифровое проектирование»	**Bokhonsky Alexander Ivanovich –** doctor of technical sciences, professor, professor of the digital design Department
Варминская Наталья Ивановна – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой физики и общетехнических дисциплин	**Varminskaya Natalia Ivanovna** – candidate of technical sciences, associate professor, head of the Department of physics and general technical disciplines
Рыжков Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Цифровое проектирование»	**Ryzhkov Alexander Igorevich** – candidate of technical sciences, associate professor of the digital design Department
ryzhkov2206@mail.ru	

Received 09.09.2024