https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-42-14-21

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СОЧЛЕНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Елисеев А.В.
Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, сочленение твердых тел, коэффициенты жесткости, динамические состояния.

Аннотация. Развивается методология оценки, коррекции и формирования динамических состояний технических объектов в условиях внешних интенсивных нагружений. В качестве расчетных схем технических объектов используются механические колебательные системы с конечным числом степеней свободы, образованные твердыми телами на упругих опорах в условиях внешних силовых возмущений гармонической формы. Ставится задача разработки математических моделей для оценки динамических состояний технических объектов с учетом преобразований сочленения, реализующихся путем увеличения жесткости связей между точками твердых тел системы. Доказана теорема о независимости результата сочленений от очередности последовательного применения частичных сочленений в формах поступательных и вращательных относительных движений.

ON THE COMMUTABILITY OF TRANSFORMATIONS OF JOINTS OF ELEMENTS OF MECHANICAL OSCILLATORY SYSTEMS

Eliseev A.V.
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: structural mathematical modeling, pairing of solids, stiffness coefficients, dynamic states.

Abstract. The methodology of assessment, correction and formation of dynamic states of technical objects under conditions of external intense loads is being developed. Mechanical oscillatory systems with a finite number of degrees of freedom formed by solids on elastic supports under conditions of external force disturbances of a harmonic shape are used as calculation schemes of technical objects. The task is to develop mathematical models for evaluating the dynamic states of technical objects, taking into account the articulation transformations realized by increasing the rigidity of the connections between the points of the solids of the system. The theorem on the independence of the result of joints from the sequence of sequential application of partial joints in the forms of translational and rotational relative movements is proved.

Введение. В качестве научно-методологической базы, ориентированной на системный подход к разработке обобщенных представлений в оценке динамических состояний технических объектов, может быть использовано структурное математическое моделирование линейных систем, основанное на сопоставлении расчетным схемам в виде механических колебательных систем структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [1-3].

Оценка динамических состояний реализуется на основе передаточных функций структурных схем системы с учетом совокупности факторов, отражающих связность внешних возмущений и контактных взаимодействий

[4-6]. К ряду эффективных способов изменения динамических состояний технических объектов относится изменение жесткости связей. Конечное изменение жесткости системы способно существенным образом повлиять на динамику технического объекта. Наравне с конечным изменением жесткости существует необходимость учета бесконечно больших изменений. Бесконечное увеличение жесткости между двумя массоинерционными элементами механической колебательной системы является формой сочленения твердых тел [7]. Сочленения элементов системы могут рассматриваться как способ изменения динамического состояния, в частности, путем сочленения в относительных поступательных и вращательных формах колебательных движений.

Вместе с тем, вопросы реализации сочленений, как формы неэквивалентных преобразований структуры и динамики системы, ещё не получили должного уровня детализации представлений.

Статья посвящена вопросам развития научно-методологического базиса в решении задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой природы, путем сочленения элементов посредством неограниченного увеличения жесткости упругих элементов системы.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная двумя твердыми телами, взаимодействующими между собой и опорными поверхностями посредством упругих элементов (рис. 1). Предполагается, что система совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положения статического равновесия под действием двух синфазных гармонических сил.

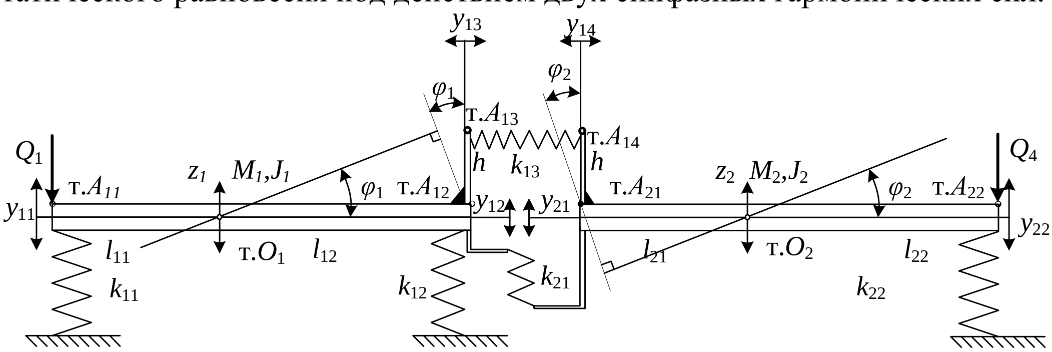

Рис.1. Расчетная схема в виде механической колебательной системы с четырьмя степенями свободы

Первое твердое тело $A_{11}A_{12}$ с массой M_1 и моментом инерции J_1 имеет центр тяжести, который находится на отрезке $A_{11}A_{12}$ в т.O_1, удаленной на расстояниях l_{11} и l_{12} от точек A_{11} и A_{12} – мест крепления упругих элементов k_{11} и k_{12}. Второе твердое тело $A_{21}A_{22}$ обладает массой M_2, моментом инерции J_2, центром тяжести, расположенном на отрезке $A_{21}A_{22}$ в точке O_1, удаленной на расстояниях l_{21} и l_{22} от точек A_{21} и A_{22} – местах крепления упруги элементов k_{21} и k_{22}. Внешние синфазные монограмонические силовые возмущения Q_L и Q_R

приложены к точкам A_{11} и A_{22} соответственно. Элемент k_{21} определяет жесткость в поступательном относительном движении точек A_{12} и A_{22}. Наравне с упругим элементом k_{21} рассматривается упругий элемент k_{13}, определяющий жесткость относительных вращательных колебаний. Особенности учета вращательных движений определяются параметром h – длинной условных стержней $A_{12}A_{13}$ и $A_{21}A_{14}$. Возможными вариантами сочленения твердых тел является сочленение в точках A_{11} и A_{21} путем увеличения жесткости упругого элемента k_{21} в поступательных формах движения. Если точки A_{11} и A_{21} уже предварительно сочленены, то упругий элемент k_{13} определяет относительные вращательные колебания твердых тел. Увеличение жесткости $k_{13}\to\infty$ приводит к дополнительному сочленению твердых тел в относительных вращательных колебаниях и превращение их в единое твердое тело. Возможно осуществление частичных сочленений в противоположной последовательности, когда вначале реализуя сочленения на основе увеличения жесткости $k_{13}\to\infty$ вращательных колебаний, а далее с помощью увеличения жесткости $k_{21}\to\infty$ поступательных колебаний.

Задача заключается в разработке методологии построения математических моделей в рамках учета дополнительных кинематических связей в форме сочленений, позволяющего оценивать динамические особенности системы.

II. Математическая модель. В качестве обобщенных координат рассматриваются смещения y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} точек A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} относительно положений статического равновесия; а также смещения z_1, z_2 центров тяжести в точках O_1 и O_2 относительно положений статического равновесия и углы поворотов φ_1, φ_2 (рис. 1). Системы координат $\{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}\}$ и $\{z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2\}$ связаны между собой посредством преобразования:

$$y = U \cdot \psi, \tag{1}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & -l_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -l_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_{21} \\ 0 & 0 & 1 & -l_{22} \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varphi_1 \\ z_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$.

Обратная зависимость координат от ψ от y выражаются в виде:

$$\psi = V \cdot y, \tag{2}$$

где $V = U^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & -c_2 \end{pmatrix}$.

Коэффициенты a_i, b_i и c_i связаны с l_{ij} формулами:

$$a_1 = \frac{l_{12}}{l_{11}+l_{12}}, b_1 = \frac{l_{11}}{l_{11}+l_{12}}, c_1 = \frac{1}{l_{11}+l_{12}},\ a_2 = \frac{l_{22}}{l_{21}+l_{22}}, b_2 = \frac{l_{21}}{l_{21}+l_{22}}, c_2 = \frac{1}{l_{21}+l_{22}}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия в координатах ψ имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\left\langle M_J \dot{\psi}, \dot{\psi} \right\rangle, \tag{4}$$

где матрица массоинерционных коэффициентов имеет диагональное представление:

$$M_J = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & M_2 & \\ 0 & & & J_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В координатах y кинетическая энергия (4) принимает вид:

$$T = \frac{1}{2}\left\langle V^* M_J V \dot{y}, \dot{y} \right\rangle, \tag{6}$$

где V^* означает транспонированную матрицу V.

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$\varPi = \frac{1}{2}\left\langle (K + k_{13} h^2 C) y, y \right\rangle, \tag{7}$$

где $K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12}+k_{21} & -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{21} & k_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1^{\ 2} & -c_1^{\ 2} & -c_1c_2 & c_1c_2 \\ -c_1^{\ 2} & c_1^{\ 2} & c_1c_2 & -c_1c_2 \\ -c_1c_2 & c_1c_2 & c_2^{\ 2} & -c_2^{\ 2} \\ c_1c_2 & -c_1c_2 & -c_2^{\ 2} & c_2^{\ 2} \end{pmatrix}$.

Дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода представляются матричной системой:

$$V^* M_J V \ddot{y} + (K + k_{13} h^2 C) y = Q, \tag{8}$$

где $\ddot{y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_{11} \\ \ddot{y}_{12} \\ \ddot{y}_{21} \\ \ddot{y}_{22} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} Q_L \\ 0 \\ 0 \\ Q_R \end{pmatrix}$.

Интегральное преобразование Лапласа системы дифференциальных уравнений (8) с нулевыми начальными условиями приводит к системе алгебраических уравнений относительно изображений:

$$\left(V^* M_J V p^2 + K + k_{13} h^2 C\right)\overline{y} = \overline{Q}, \tag{9}$$

где $\overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_{11} \\ \overline{y}_{12} \\ \overline{y}_{21} \\ \overline{y}_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{Q} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_L \\ 0 \\ 0 \\ \overline{Q}_R \end{pmatrix}$, знак «–» над символом означает изображение Лапласа; $p = j\omega$ – комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$ [8].

Для расчета сочленений, реализующихся посредством увеличения коэффициентов жесткости k_{12} и k_{13}, запишем систему (9) в виде, в котором жесткости представлены как линейные коэффициенты:

$$\left(p^2 M + K_{(0)} + k_{21} G_{(21)} + k_{13} h^2 C\right)\overline{y} = \overline{Q}\,, \tag{10}$$

где $K_{(0)} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}$, $G_{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M = V^* M_J V$.

Система алгебраических уравнений (10) может быть представлена в виде обобщенной структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

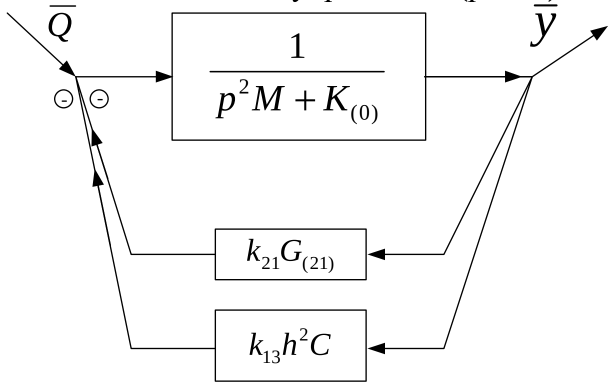

Рис. 2. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы по рисунку 1

Матрица системы уравнений (10), представляющая собой линейную зависимость от матриц жесткости с коэффициентами k_{21} и $k_{13,}$ позволяет определять результаты сочленений в формах поступательных и вращательных движений.

Возникает вопрос о зависимости использования частичных сочленений от их очередности применения к системе.

III. О независимости результата преобразования системы от порядка двух последовательных частичных сочленений. Чтобы показать, что результаты сложных сочленений преобразований системы не зависят от выбора очередности простых сочленений, докажем теорему.

Теорема. Пусть для системы существуют частичные сочленения $k_1 \to \infty$ и $k_2 \to \infty$. Тогда результат последовательного применения двух частичных сочленений $k_1 \to \infty$, $k_2 \to \infty$ или $k_2 \to \infty$, $k_1 \to \infty$ не зависит от их порядка.

Доказательство. Рассмотрим порядок сочленений в виде очередности $k_{21} \to \infty$, $k_{13} \to \infty$. Для отображения результатов сочленения будем использовать представление уравнений движения в виде (10). Поступательное сочленение $k_{21} \to \infty$ предполагает использование связи между координатами:

$$y = G_{(21)}{}^{I}\left(y_{(21)}\right)^{I}, \qquad (11)$$

где $(G_{(21)})^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(y_{(21)})^{I} = \begin{pmatrix} y_{11}{}^{I} \\ y_{12}{}^{I} \\ y_{22}{}^{I} \end{pmatrix}$.

Вращательное сочленение $k_{13}\to\infty$ предполагает связь координат в виде:

$$y_{(21)}{}^{I} = G_{(13)}{}^{I}\left(y_{(13)}\right)^{I}, \qquad (12)$$

где $(y_{(13)})^{I} = \begin{pmatrix} y_{11}{}^{I} \\ y_{12}{}^{I} \end{pmatrix}$, $G_{(13)}{}^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_1}{c_1+c_2} & \dfrac{c_2}{c_1+c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Последовательное выполнение поступательного и вращательного сочленений с учетом очередности (11), (12) предполагает связь координат:

$$y = G_{(21)}{}^{I}G_{(13)}{}^{I}\,(y_{(13)})^{I}, \qquad (13)$$

$$\text{где } G_{(21)}{}^{I}G_{(13)}{}^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_1}{c_1+c_2} & \dfrac{c_2}{c_1+c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Наравне с двумя последовательными сочленениями $k_{21}\to\infty$, $k_{13}\to\infty$ могут быть выполнены сочленения в обратном порядке $k_{13}\to\infty$, $k_{21}\to\infty$. В случае выполнения сочленений в порядке $k_{13}\to\infty$, $k_{21}\to\infty$ вращательное сочленение k_{13} приводит к замене переменных:

$$y = G_{(13)}{}^{II}y_{(13)}{}^{II}, \qquad (15)$$

где $G_{(13)}{}^{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{c_1}{c_2} & -\dfrac{c_1}{c_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(y_{(13)}\right)^{II} = \begin{pmatrix} y_{11}{}^{II} \\ y_{12}{}^{II} \\ y_{22}{}^{II} \end{pmatrix}$.

Дальнейшее поступательное сочленение $k_{21}\to\infty$ представляется заменой переменных:

$$y_{(13)}{}^{II} = G_{(21)}{}^{II}\left(y_{(21)}\right)^{II}, \qquad (16)$$

где $G_{(21)}{}^{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_1}{c_1+c_2} & \dfrac{c_2}{c_1+c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(y_{(21)}\right)^{II} = \begin{pmatrix} y_{11}{}^{II} \\ y_{22}{}^{II} \end{pmatrix}$.

Последовательное выполнение вращательного и поступательного частичных сочленений приводит к композиции замен переменных (15), (16):

$$y = G_{(13)}{}^{II} G_{(21)}{}^{II} (y_{(21)})^{II}, \tag{17}$$

где $G_{(13)}{}^{II} G_{(21)}{}^{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_1}{c_1 + c_2} & \dfrac{c_2}{c_1 + c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (18)

Равенство выражений (14) и (18)

$$G_{(21)}{}^{I} G_{(13)}{}^{I} = G_{(13)}{}^{II} G_{(21)}{}^{II} \tag{19}$$

доказывает независимость результат двух последовательных сочленений от их порядка. **Теорема доказана.**

На основе теоремы может быть введено понятие суперпозиции сочленений двух твердых тел и развиты представления о частичных сочленениях твердых тел в результате неэквивалентных преобразований систем.

Заключение. Рассмотрены задачи реализации сочленения твердых тел, образующих механические колебательные системы. Под сочленением твердых тел понимается предельный переход к бесконечной жесткости упругих элементов, соединяющих твердые тела системы. Рассмотрено два типа сочленений, реализующихся в поступательных и вращательных формах относительных движений твердых тел механической колебательной системы с четырьмя степенями свободы.

Для модельной задачи показано, что результат сочленения твердых тел в поступательных формах движения, а затем во вращательных формах движения совпадает с результатом сочленения, для которого вначале реализуется сочленение во вращательных, а затем в поступательных формах относительного движения. Независимость результата двух частичных сочленений от порядка выбора сочленений в поступательной и вращательной формах относительного движения позволяет ввести понятие комбинированного сочленения по двум формам относительных движений, которое может быть обобщено на системы с произвольным числом степеней свободы.

Разработанные подходы могут быть использованы для развития представлений о вибрационных полях технических объектов, учете обратных связей, а также особенностей взаимодействий с учетом неудерживающих связей. В плане практических приложений разработанная методология может служить базой для разработки математических моделей рельсовых соединений, элементов вибрационных технологических машин, виброиспытательных стендов, вибрационных датчиков и измерительных средств динамических состояний.

Список литературы

1. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. – Новосибирск: Наука, 2011. – 384 с.

2. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. – Springer International Publishing, Cham, 2020. – Vol. 252. – 521 p.
3. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA, IGI Global, 2023. – 288 p.
4. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1 (49). – С. 33-41.
5. Елисеев А.В. Технология оценки свойств динамического взаимодействия в контактах составных твердых тел // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. – 2014. – № 1-2. – С. 179-183.
6. Елисеев А.В., Мамаев Л.А., Ситов И.С. Некоторые подходы к обоснованию схемы инерционного возбуждения в технологических вибрационных машинах // Системы. Методы. Технологии. – 2015. – № 4(28). – С. 15-24.
7. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
8. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. – М.: Наука, 1959. – 368 с.

References

1. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillatory systems. – Novosibirsk: Science, 2011. – 384 p.
2. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control. – Springer International Publishing, Cham, 2020. – Vol. 252. – 521 p.
3. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. – Hershey, PA, IGI Global, 2023. – 288 p.
4. Eliseev A.V., Vuong K.Ch. Some possibilities for controlling the one-dimensional vibration field of a technological machine // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016, no. 1(49), pp. 33-41.
5. Eliseev A.V. Technology for assessing the properties of dynamic interaction in contacts of composite solids // Scientific problems of transport of Siberia and the Far East. 2014, no. 1-2, pp. 179-183.
6. Eliseev A.V., Mamaev L.A., Sitov I.S. Some approaches to substantiating the inertial excitation circuit in technological vibration machines // Systems. Methods. Technologies. 2015, no. 4(28), pp. 15-24.
7. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Articulations of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems. – Irkutsk: IrGUPS, 2012. – 156 p.
8. Lurie A.I. Operational calculus and application in technical applications. – M.: Science, 1959. – 368 p.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики	**Eliseev Andrey Vladimirovich** – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics
eavsh@ya.ru	

Received 29.06.2024