

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-41-26-37>

ОСОБЕННОСТИ СОЧЛЕНЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ, ФОРМИРОВАНИЯ И КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ

Елисеев А.В., Миронов А.С.

*Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск,
Россия*

Ключевые слова: механическая колебательная система, сочленение твердых тел, режимы динамического гашения колебаний, резонанс, системы координат.

Аннотация. Рассматриваются проблемы формирования динамических состояний технических объектов в условиях вибрационных нагрузений. Используются методы структурного математического моделирования, основанного на сопоставлении механическим колебательным системам структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Ставятся задачи оценки, формирования и коррекции динамического состояния технического объекта, находящегося в условиях вибрационного нагружения совокупностью силовых возмущений. Предложен метод построения математических моделей механических колебательных систем с возможностями сочленения точек твердых тел путем увеличения жесткости упругих элементов, определяющих особенности относительных поступательных и угловых колебаний. Установлена связь между увеличением жесткости упругого элемента, определяющим сочленение, и увеличением собственной частоты и частоты динамического гашения колебаний, интерпретируемая как причина уменьшения степеней свободы. Приведены результаты численных экспериментов.

FEATURES OF JOINTS OF SOLIDS IN THE TASKS OF ASSESSMENT, FORMATION AND CORRECTION OF DYNAMIC STATES OF TECHNICAL OBJECTS UNDER CONDITIONS OF VIBRATION LOADS

Eliseev A.V., Mironov A.S.

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

Keywords: mechanical oscillatory system, articulation of solids, modes of dynamic vibration damping, resonance, coordinate systems.

Abstract. The problems of formation of dynamic states of technical objects in conditions of vibration loads are considered. The methods of structural mathematical modeling based on the comparison of structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems with mechanical oscillatory systems are used. The tasks of evaluating, forming and correcting the dynamic state of a technical object under conditions of vibrational loading by a set of force disturbances are set. A method is proposed for constructing mathematical models of mechanical oscillatory systems with the possibility of articulating points of solids by increasing the stiffness of elastic elements that determine the features of relative translational and angular vibrations. A connection has been established between an increase in the stiffness of the elastic element defining the joint and an increase in the natural frequency and frequency of dynamic damping. It is shown that joints can be implemented as specific transformations of the coordinate system. The results of numerical experiments are presented.

Введение. В динамике транспортных средств и технологических машин, работающих в условиях интенсивной вибрации, существенное значение имеет оценка взаимодействий и обеспечение надежности и безопасности производственных процессов [1]. Для снижения вибрации и предотвращения колебаний в транспортных машинах используются различные средства, такие как системы рессорного подвешивания, пружины, амортизаторы и демпферы. Обеспечение безопасности движения включает в себя использование технологий для оценки, формирования и коррекции параметров динамического состояния и их применение в системах автоматического управления. Динамика даже отдельных объектов, таких как электровозы или вагоны, представляет сложную задачу из-за многофункциональности систем и множества динамических связей. Аналитические подходы к оценке динамических процессов обычно упрощают математические модели, что позволяет находить эффективные конструкторские решения [2].

Статья посвящена развитию методологии разработки математических моделей технических объектов в условиях вибрационных нагрузений, основанной на учете возможности сочленении элементов механических колебательных систем путем увеличения жесткости упругих элементов.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная двумя твердыми телами $A_{11}A_{12}$ и $A_{21}A_{22}$ с массами M_1, M_2 и моментами инерции J_1, J_2 соответственно (рис. 1). Предполагается, что центры тяжести твердых тел находятся на отрезках $A_{11}A_{12}$ и $A_{21}A_{22}$. Система совершает малые вынужденные установившиеся колебания под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений Q_1 и Q_4 .

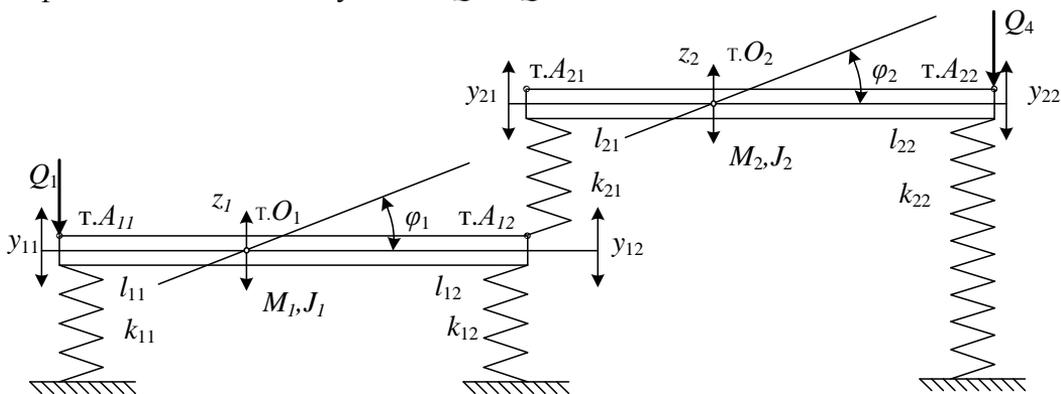


Рис. 1. Расчетная схема в виде механической колебательной системы

Твердые тела $A_{11}A_{12}$ и $A_{21}A_{22}$ установлены на упругие элементы k_{11}, k_{12} и k_{21}, k_{22} соответственно. Предполагается, что в точках A_{12} и A_{21} реализуется сочленение твердых тел, понимаемое как неограниченное возрастание жесткостей упругих элементов, определяющих особенности относительных поступательных или угловых колебаний.

Задача заключается в развитии подхода к разработке математических моделей технических объектов с расчетными схемами в виде механических

колебательных систем путем сочленения точек массоинерционных элементов в поступательных и вращательных формах относительного движения.

II. Математическая модель. В качестве обобщенных координат $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ рассматриваются координаты смещения точек $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ твердых тел относительно положений статического равновесия (рис. 1). Колебания центров тяжести z_1, z_2 и углы φ_1, φ_2 – связаны с координатами $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ соответствующими зависимостями:

$$\begin{cases} y_{11} = z_1 - l_{11}\varphi_1; \\ y_{12} = z_1 + l_{12}\varphi_1; \\ y_{21} = z_2 - l_{21}\varphi_2; \\ y_{22} = z_2 + l_{22}\varphi_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$ – расстояния от центров тяжести O_1 и O_2 до точек крепления упругих элементов (рис. 1).

Соответствующие связи между координатами можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -l_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -l_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_{21} \\ 0 & 0 & 1 & -l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \varphi_1 \\ z_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

На основе выражения (2) могут быть построены обратные зависимости:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{l_{12}}{l_{11} + l_{12}} y_{11} + \frac{l_{11}}{l_{11} + l_{12}} y_{12}; \\ \varphi_1 = \frac{1}{l_{11} + l_{12}} (y_{12} - y_{11}); \\ z_2 = \frac{l_{22}}{l_{21} + l_{22}} y_{21} + \frac{l_{21}}{l_{21} + l_{22}} y_{22}; \\ \varphi_2 = \frac{1}{l_{21} + l_{22}} (y_{22} - y_{21}). \end{cases} \quad (3)$$

В матричном виде данные связи будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \varphi_1 \\ z_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_{12}}{l_{11} + l_{12}} & \frac{l_{11}}{l_{11} + l_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_{11} + l_{12}} & \frac{1}{l_{11} + l_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{22}}{l_{21} + l_{22}} & \frac{l_{21}}{l_{21} + l_{22}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_{21} + l_{22}} & \frac{1}{l_{21} + l_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Введём обозначения:

$$a_1 = \frac{l_{12}}{l_{11} + l_{12}}, \quad b_1 = \frac{l_{11}}{l_{11} + l_{12}}, \quad c_1 = -\frac{1}{l_{11} + l_{12}}, \quad (5)$$

$$a_2 = \frac{l_{22}}{l_{21} + l_{22}}, \quad b_2 = \frac{l_{21}}{l_{21} + l_{22}}, \quad c_1 = -\frac{1}{l_{21} + l_{22}}. \quad (6)$$

В итоге может быть представлена зависимость в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \Phi_1 \\ z_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & -c_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\Phi}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\Phi}_2^2; \quad (8)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_{11} y_{11}^2 + \frac{1}{2} k_{12} y_{12}^2 + \frac{1}{2} k_{21} (y_{21} - y_{12})^2 + \frac{1}{2} k_{22} y_{22}^2. \quad (9)$$

В переменных y_{11} , y_{12} , y_{21} , y_{22} выражение кинетической энергии (8) принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} M_1 (a_1 \dot{y}_{11} + b_1 \dot{y}_{12})^2 + \frac{1}{2} J_1 c_1^2 (\dot{y}_{21} - \dot{y}_{11})^2 + \frac{1}{2} M_2 (a_2 \dot{y}_{21} + b_2 \dot{y}_{22})^2 + \frac{1}{2} J_2 c_2^2 (\dot{y}_{22} - \dot{y}_{21})^2. \quad (10)$$

Матричная форма записей выражений кинетической и потенциальной энергии принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \Phi_1 \\ z_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \Phi_1 \\ z_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -c_2 \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & -c_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} a_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 & a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & 0 & 0 \\ a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 \\ 0 & 0 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 & b_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} + k_{21} & -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{21} & k_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (14)$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений Лагранжа 2-ого рода принимает вид:

$$\begin{cases} (a_1^2 M_1 + c_1^2 J_1) \ddot{y}_{11} + k_{11} y_{11} + (a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1) \ddot{y}_{12} = Q_1, \\ (a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1) \ddot{y}_{11} + (b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1) \ddot{y}_{12} + (k_{12} + k_{21}) y_{12} - k_{21} y_{21} = 0, \\ -k_{21} y_{12} + (a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2) \ddot{y}_{21} + k_{21} y_{21} + (a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2) \ddot{y}_{22} = 0, \\ (a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2) \ddot{y}_{21} + (b_2^2 M_2 + c_2^2 J_2) \ddot{y}_{22} + k_{22} y_{22} = Q_4. \end{cases} \quad (15)$$

После интегральных преобразований Лапласа [3] система принимает вид алгебраических уравнений относительно изображений Лапласа:

$$\begin{cases} ((a_1^2 M_1 + c_1^2 J_1) p^2 + k_{11}) \bar{y}_{11} + (a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1) p^2 \bar{y}_{12} = \bar{Q}_1, \\ (a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1) p^2 \bar{y}_{11} + ((b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1) p^2 + (k_{12} + k_{21})) \bar{y}_{12} - k_{21} \bar{y}_{21} = 0, \\ -k_{21} \bar{y}_{12} + ((a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2) p^2 + k_{21}) \bar{y}_{21} + (a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2) p^2 \bar{y}_{22} = 0, \\ (a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2) p^2 \bar{y}_{21} + ((b_2^2 M_2 + c_2^2 J_2) p^2 + k_{22}) \bar{y}_{22} = \bar{Q}_4, \end{cases} \quad (16)$$

где знак «-» над символом функции отображает преобразование Лапласа.

В матричной форме система (16) может быть представлена:

$$(p^2 M + K) \bar{Y} = \bar{Q}, \quad (17)$$

$$\text{где } M = \begin{pmatrix} a_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 & a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & 0 & 0 \\ a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 \\ 0 & 0 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 & b_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} + k_{21} & -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{21} & k_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (19) \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{22} \end{pmatrix}, \quad (20) \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_4 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Математическая модель (17) механической колебательной системы с расчетной схемой в виде двух твердых тел (рис. 1) может быть представлена в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 2).

Твердые тела $A_{11}A_{12}$ и $A_{21}A_{22}$ могут быть сочленены в точках A_{12} и A_{22} путем увеличения жесткости элемента k_{12} .

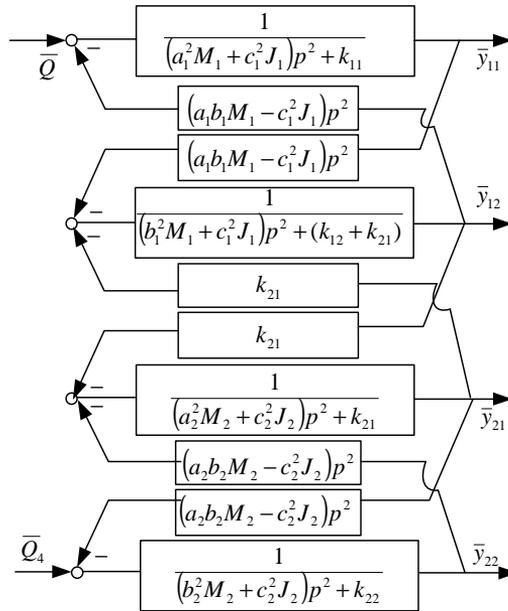


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на рисунке 1

II. Сочленения элементов в поступательных формах колебаний.

Рассматривается расчетная схема (рис. 1) в предположении, что $k_{21} \rightarrow \infty$.

Деление выражений 2-ой и 3-ей строки из системы уравнений (16):

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1) p^2 \bar{y}_{11} + ((b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1) p^2 + (k_{12} + k_{21})) \bar{y}_{12} - k_{21} \bar{y}_{21} &= 0; \\ -k_{21} \bar{y}_{12} + ((a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2) p^2 + k_{21}) \bar{y}_{21} + (a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2) p^2 \bar{y}_{22} &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

на коэффициент жесткости k_{21} , который стремится к бесконечности $k_{21} \rightarrow \infty$, влечет условие

$$y_{12} = y_{21}, \quad (23)$$

что в пределе обозначает равенство:

$$y_{12} = y_{21}, \quad (24)$$

которое может быть интерпретировано как уменьшение числа степеней свободы системы и выражено в изменениях множества собственных частот системы и частот динамического гашения колебаний. Характерные варианты изменения собственных частот в зависимости от $k_{21} \rightarrow \infty$ отображают неограниченное увеличение одной из собственных частот (рис. 3,а, линия 1) и одной из частот динамического гашения колебаний (рис. 3,б, линия 1).

Предельное условие сближения обобщенных координат (23) или условие сочленения (23) приводят к расчетной схеме, в которой точки A_{12} и A_{22} объединены (рис. 4).

В результате рассматриваемого сочленения алгебраическая система (17) приводится к системе с тремя степенями свободы:

$$S^* (p^2 M + K) S \bar{y} = S^* \bar{Q}, \quad (25)$$

где

$$\bar{Y} = S\bar{y}, \quad (26) \quad S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (27) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28) \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{22} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

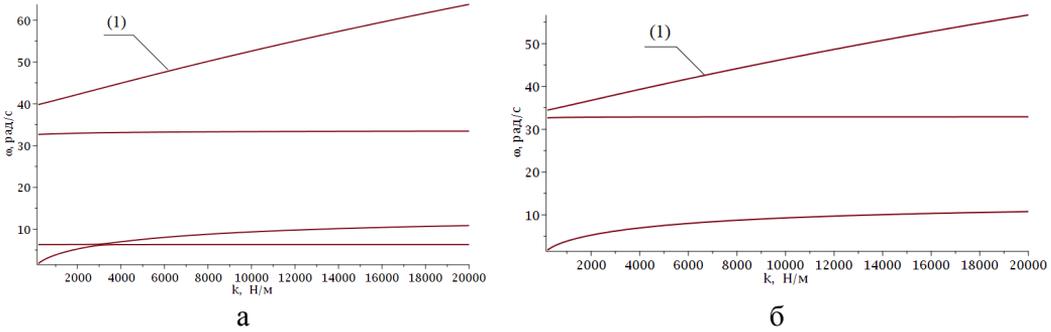


Рис. 3. Зависимость характерных частот системы от жесткости $k_{21} \rightarrow \infty$;
 а – собственные частоты; б – частоты динамического гашения колебаний;
 1 – неограниченно возрастающая частота

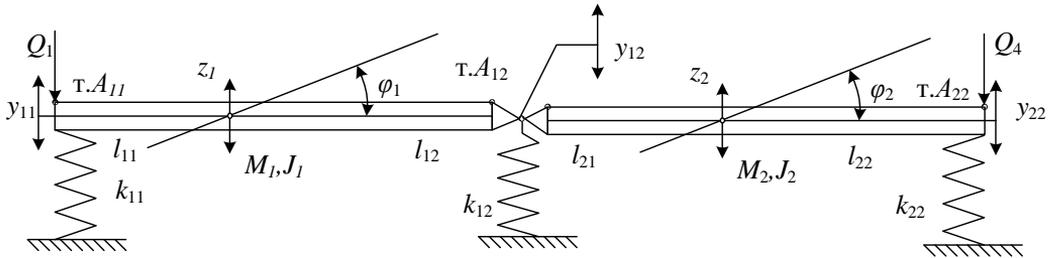


Рис. 4. Расчетная схема сочленения двух твердых тел путем предельного увеличения жесткости

Введя обозначения

$$K_0 = S^* K S, \quad (30)$$

$$M_0 = S^* M S, \quad (31)$$

$$\bar{q} = S^* \bar{Q}. \quad (32)$$

получаем систему алгебраических уравнений относительно изображений Лапласа:

$$(p^2 M_0 + K_0) \bar{y} = \bar{q}, \quad (33)$$

где
$$M_0 = \begin{pmatrix} a_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 & a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & 0 \\ a_1 b_1 M_1 - c_1^2 J_1 & b_1^2 M_1 + c_1^2 J_1 + a_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 \\ 0 & a_2 b_2 M_2 - c_2^2 J_2 & b_2^2 M_2 + c_2^2 J_2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (35) \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \\ \bar{Q}_4 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Условия сочленений приводят к формированию механической колебательной системы с тремя степенями свободы. Математическая модель может быть представлена в виде структурной схемы (рис. 5).

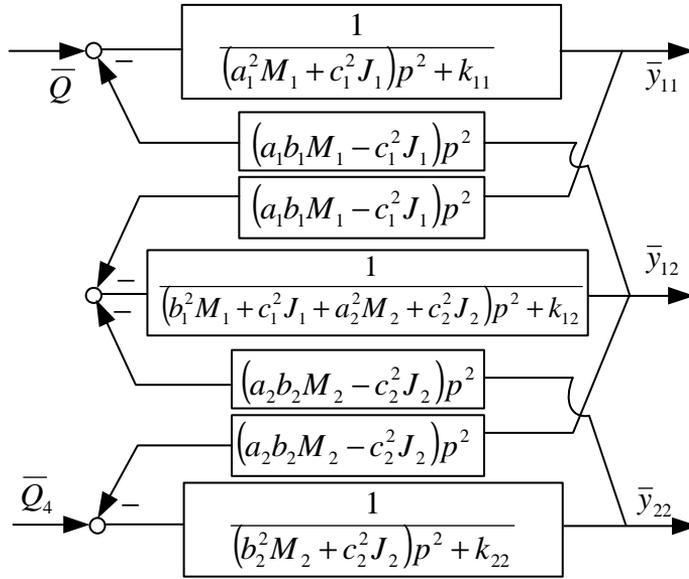


Рис. 5. Структурная схема механической колебательной системы, полученной в результате сочленения в точках A_{12} и A_{21}

В свою очередь, наравне с сочленением точек A_{12} и A_{21} , способных совершать малые вертикальные относительные колебания, возможна форма сочленения, которая устраняет одну степень свободы, связанную с относительными угловыми колебаниями рассматриваемых твердых тел.

III. Введение дополнительных упругих связей. Рассматривается дополнительная упругая связь, определяющая особенности относительных угловых колебаний системы твердых тел (рис. 6).

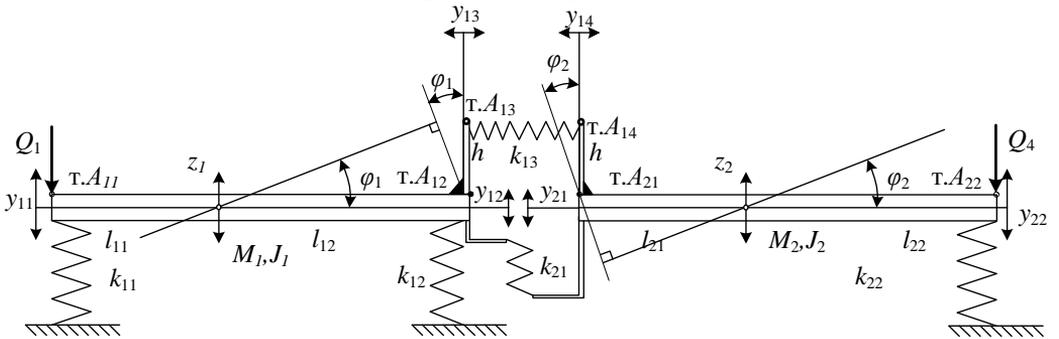


Рис. 6. Расчетная схема механической колебательной системы с учетом дополнительного упругого элемента k_{13} и длиной h жесткого держателя

Включение в систему упругого элемента k_{12} приводит к добавлению к потенциальной энергии системы слагаемого:

$$\Pi_{13} = \frac{1}{2} k_{13} h^2 \langle E_{11} \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle = \frac{1}{2} k_{13} h^2 \langle C_{12}^* E_{11} C_{12} \bar{Y}, \bar{Y} \rangle = \frac{1}{2} k_{13} h^2 \langle C_{44} \bar{Y}, \bar{Y} \rangle, \quad (37)$$

где $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}$, (38) $C_{12} = \begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$, (39) $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, (40)

$$C_{44} = C_{12}^* E_{11} C_{12}, (41) \quad \bar{\varphi} = C_{12} \bar{Y}, (42) \quad C_{44} = \begin{pmatrix} c_1^2 & -c_1^2 & -c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ -c_1^2 & c_1^2 & c_1 c_2 & -c_1 c_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 c_2 & c_2^2 & -c_2^2 \\ c_1 c_2 & -c_1 c_2 & -c_2^2 & c_2^2 \end{pmatrix}. (43)$$

Добавление упругого элемента в систему приводит систему алгебраических уравнений (17) к виду:

$$(p^2 M + K + k_{13} h^2 C_{44}) \bar{Y}_c = \bar{Q}. (44)$$

В свою очередь, в механической колебательной системе (рис. 6) сочленение твердых тел в точках A_{12} и A_{21} ($k_{21} \rightarrow \infty$) приводит к расчетной схеме, учитывающей относительные угловые колебания с помощью дополнительных стержней $A_{12}A_{13}$, $A_{12}A_{14}$ и упругого элемента k_{13} (рис. 7).

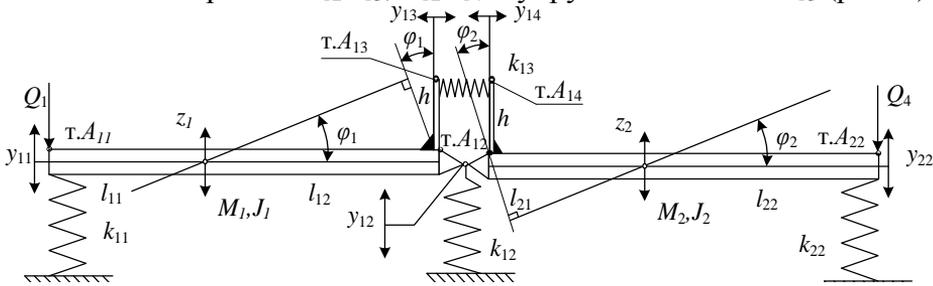


Рис. 7. Введение дополнительных связей для угловых колебаний с учетом сочленения $k_{21} \rightarrow \infty$

Аналитически, учет сочленения точек A_{12} и A_{21} реализуется путем перехода к системе алгебраических уравнений:

$$S^* (p^2 M + K + k_{13} h^2 C_{44}) S \bar{Y}_c = S^* \bar{Q}. (45)$$

Механическая колебательная система (рис. 7) может быть представлена в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 8).

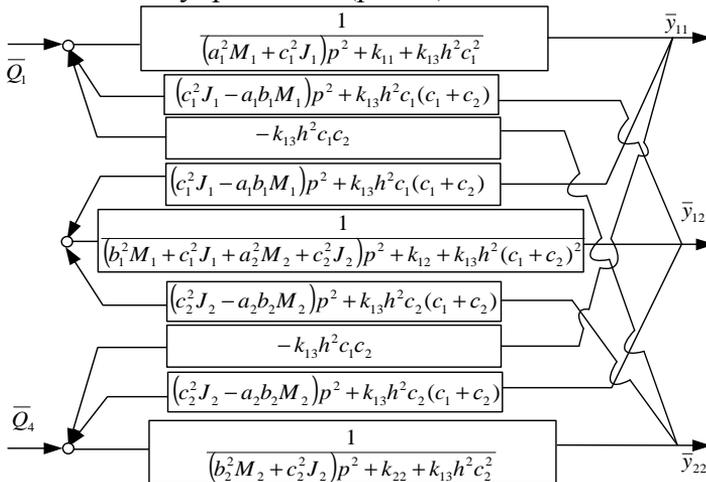


Рис. 8. Структурная схема механической колебательной системы с дополнительными упругими связями

В свою очередь, совокупность твердых тел системы (рис. 5) так же могут быть сочленены путем увеличения жесткости упругого элемента в относительных угловых колебаниях.

IV. Сочленение с учетом увеличения жесткости угловых колебаний.

Сочленение твердых тел путем увеличения угловой жесткости связано с предельным соотношением:

$$k_{13} \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Можно сказать, что постепенное увеличение жесткости угловых относительных колебаний сопровождается неограниченным увеличением одной частоты собственных колебаний и одной частоты динамического гашения колебаний (рис. 9).

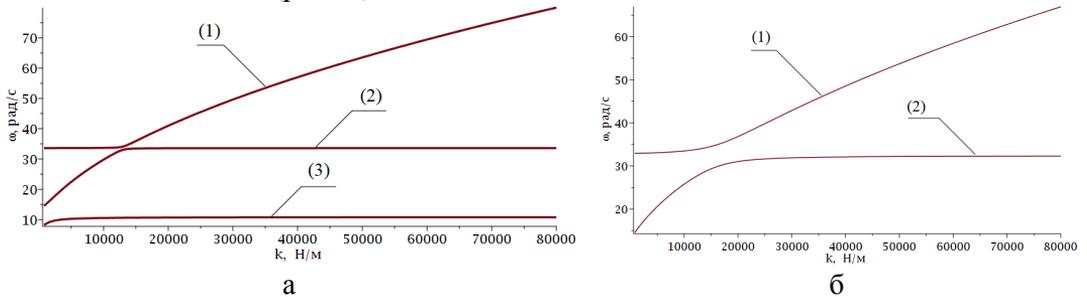


Рис.9. Характерные частоты в зависимости от жесткости $k_{13} \rightarrow \infty$ для системы на рисунке 7: а – собственные частоты (1 – неограниченная частота; 2, 3 – ограниченные частоты); б – частоты динамического гашения колебаний (1 – неограниченная частота, 2 – ограниченная частота (иллюстрация отражает качественный характер связи и зависит от сетки))

Предельная система или система с учетом условий $k_{13} \rightarrow \infty$ предполагает выполнение матричных равенств, полученных в результате деления алгебраических выражений системы на коэффициент k_{13} и переход к пределу:

$$C_0 \bar{y}_c = S^* C_{44} S \bar{y}_c = 0, \quad (47)$$

где
$$C_0 = S^* C_{44} S = \begin{pmatrix} c_1^2 & -c_1^2 - c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ -c_1^2 - c_1 c_2 & c_1^2 + 2c_1 c_2 + c_2^2 & -c_2^2 - c_1 c_2 \\ c_1 c_2 & -c_2^2 - c_1 c_2 & c_2^2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Условие сопряжения $k_{13} \rightarrow \infty$ может быть записано в виде условий на обобщенные координаты:

$$c_1 \bar{y}_1 - (c_1 + c_2) \bar{y}_2 + c_3 \bar{y}_3 = 0. \quad (49)$$

От куда может быть выражена координата y_2 :

$$\bar{y}_2 = \frac{c_1}{(c_1 + c_2)} \bar{y}_1 + \frac{c_2}{(c_1 + c_2)} \bar{y}_3. \quad (50)$$

Запишем связь между координатами:

$$\bar{y} = C_{32} \bar{y}_0. \quad (51)$$

$$\text{где } C_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_1 + c_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (52) \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}, \quad (53) \quad \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} \bar{y}_{01} \\ \bar{y}_{02} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Сочленение $k_{13} \rightarrow \infty$ приводит к преобразованию системы:

$$C_{32}^* (p^2 M_0 + K_0 + k_{13} h^2 C_0) C_{32} \bar{y}_0 = C_{32}^* S^* \bar{Q} = C_{32}^* \bar{q}, \quad (55)$$

$$(p^2 C_{32}^* M_0 C_{32} + C_{32}^* K_0 C_{32} + k_{13} h^2 C_{32}^* C_0 C_{32}) \bar{y}_0 = C_{32}^* S^* \bar{Q} = C_{32}^* \bar{q}, \quad (56)$$

$$C_0 C_{32} = 0, \quad (57) \quad (p^2 C_{32}^* M_0 C_{32} + C_{32}^* K_0 C_{32}) \bar{y}_0 = C_{32}^* S^* \bar{Q} = C_{32}^* \bar{q} \quad (58)$$

Система с учетом сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ представляет собой твердое тело, установленное на упругие опоры и обладающее двумя степенями свободы. Параметры системы: $M_1=20$ кг, $M_2=35$ кг, $J_1=12$ кг·м², $J_2=45$ кг·м², $k_{11}=1000$ Н/м, $k_{11}=15000$ Н/м, $k_{11}=27000$ Н/м, $l_{11}=0,2$ м, $l_{12}=0,8$ м, $l_{21}=0,3$ м, $l_{22}=0,7$ м, $h=1$ м. Собственные частоты системы составляют $\omega_1 = 10,84$ рад/с, $\omega_2 = 33,6$ рад/с, частота динамического гашения колебаний $\omega_1 = 10,84$ рад/с. Соответствующая структурная схема представлена на рисунке 10.

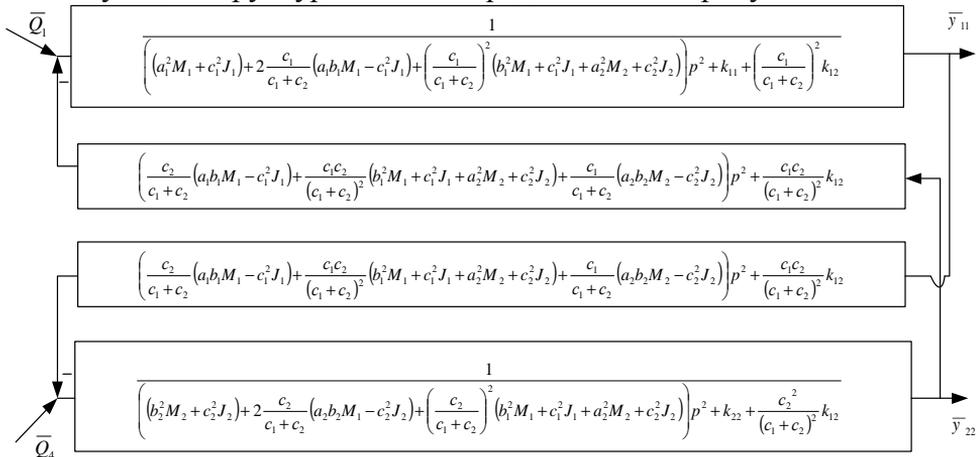


Рис. 10. Структурная схема механической колебательной системы с учетом сочленения угловых форм колебаний $k_{13} \rightarrow \infty$

На основе структурной схемы (рис. 10) могут быть построены соответствующие передаточные функции.

Заключение. Сочленения в динамических взаимодействиях элементов механических колебательных систем рассматриваться как способ формирования динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения. Сочленения проявляются как переход к предельному состоянию взаимодействий между двумя инерционными элементами, когда жесткость упругого соединяющего элемента стремится к большим значениям. В рамках представленных примеров показано, что сочленения, связанные с увеличением жесткости, приводят к неограниченному росту одной собственной частоты и одной частоты динамического гашения колебаний.

Разработанный подход может служить основой для системного анализа механических колебательных систем, направленного на оценку, формирования и коррекцию динамических состояний технических объектов в зависимости от разнообразных параметров, включая внешние силовые возмущения и такие внутренние характеристики, как жесткость.

Подобные подходы могут быть использованы для разработки вибрационных технологических машин и виброиспытательного оборудования.

Список литературы

1. De Silva C.W. *Vibration. Fundamentals and Practice*. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
2. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
3. Eliseev A.V. *Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles*. Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.

References

1. De Silva C.W. *Vibration. Fundamentals and Practice*. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
2. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
3. Eliseev A.V. *Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles*. Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математики	Eliseev Andrey Vladimirovich – candidate of technical sciences, associate professor of Department of mathematics
Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования eavsh@ya.ru	Mironov Artem Sergeevich – applicant, REC of modern technologies, system analysis and modeling

Received 30.04.2024