https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-40-66-70

СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СПРОТТА НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ

Талагаев Ю.В., Швец Д.А.
Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Россия

Ключевые слова: коллективное поведение, синхронизация, хаотическая система, нечеткое ремоделирование, сверхустойчивость, компьютерное моделирование.
Аннотация. Представлен подход к решению задачи синхронизации двух хаотических систем. Показано, что нечеткое ремоделирование позволяет задействовать для нахождения нечеткого управления условия сверхустойчивости, которые обеспечивают заданные характеристики переходного процесса. Эффективность метода показана на примере синхронизации двух системы Спротта, принадлежащих к широкому кругу хаотических систем.

SYNCHRONIZATION OF TWO CHAOTIC SPROTT SYSTEMS BASED ON SUPERSTABILITY CONDITIONS

Talagaev Yu.V., Shvets D.A.
Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin, Voronezh, Russia

Keywords: collective behavior, synchronization, chaotic system, fuzzy remodeling, superstability, computer modeling.
Abstract. This approach to solving problems of synchronization of two chaotic systems. It is shown that odd remodeling makes it possible to prohibit the presence of fuzzy control under conditions of superstability, which determine the given characteristics of the transition process. The effectiveness of the method is demonstrated on the basis of cyclic synchronization of two fast response systems used in a wide range of chaotic systems.

Синхронизация групповой динамики автономных агентов является важной областью исследований, имеющей широкий круг приложений. Согласованное коллективное поведение требуется при мониторинге несколькими БПЛА заданной области, выполнении различных форм движения и маневрирования. Важным направлением развития методов синхронизации является обеспечение заданных характеристик переходного процесса, реализующих желаемый вид коллективного поведения [1].

Рассмотрим задачу синхронизации двух идентичных нелинейных динамических систем. Пусть $\dot{x}(t) = f(x(t))$ – ведущая система ($x(t) \in R^n$ – состояние), $\dot{y}(t) = \hat{f}(y(t), x(t), u(t))$ – ведомая система ($y(t) \in R^n$ – состояние, $u(t) \in R^p$ – управление). Предполагается, что системы демонстрируют хаотическую динамику.

Задача синхронизации заключается в нахождении отвечающего выбранным критериям качества управления $u(t) \in R^p$, которое обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{t\to\infty} \| e(t) \| = 0,$$

где $e(t) = y(t) - x(t)$ – ошибка синхронизации. Достижение синхронизации означает, что для любых начальных условий после завершения переходного процесса состояния обеих систем оказываются одинаковыми (такой тип коллективного поведения называется координатная синхронизация [1]).

Выберем в качестве объектов синхронизации две идентичные хаотические системы Спротта (взята система F [2]), описываемые системой уравнений

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t),\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 0{,}5x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_3(t). \qquad (1)$$

Индивидуальная динамика систем, характеризуемая наличием хаотического аттрактора, показана на рисунке 1.

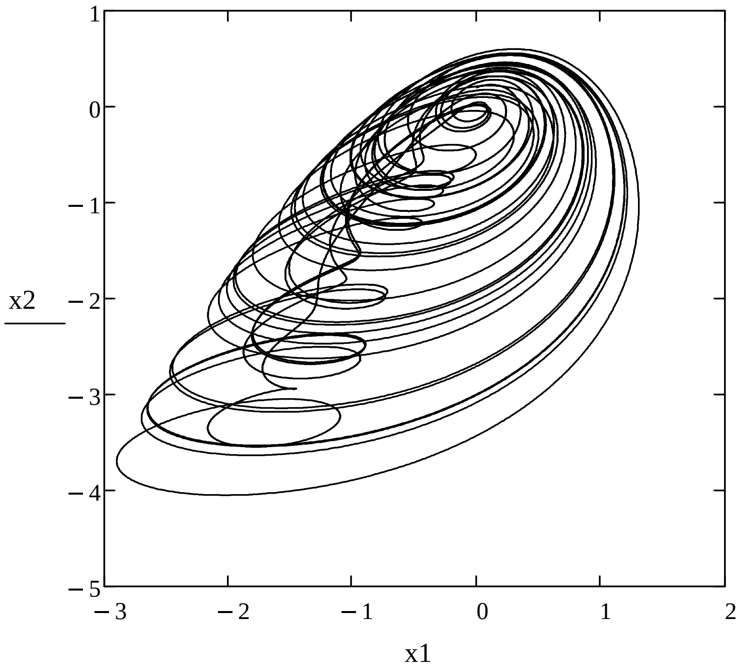

Рис. 1. Хаотическая динамика F-системы Спротта (1)

Особенностью раскрываемого в данной работе способа решения задачи синхронизации является требования, предъявляемые к переходному процессу. Динамика хаотических систем характеризуется высокой неопределенностью и неустойчивостью. Поэтому при выборе управления желательно, чтобы он препятствовал возникновению эффекта всплеска – скачкообразному росту нормы решения, который зачастую возникает на начальном этапе переходного процесса. Продуктивным способом решения проблемы является переход к нечеткому описанию.

Осуществим нечеткое ремоделирование [3], заменив в области фазового пространства

$$\mathrm{H} = \{x \in R : \underline{x}_1 \le x_1(t) \le \overline{x}_1\},\ \underline{x}_1 = -5,\ \overline{x}_1 = 5 .$$

исходные модели эквивалентными нечеткими ТС-моделями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(\theta(t))\big(A_i x(t)\big)\ (\textit{ведущая система}), \tag{2}$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(\theta(t))\big(A_i y(t) + B_i u(t)\big)\ (\textit{ведомая система}), \tag{3}$$

где функции принадлежности имеют вид

$$h_1(\theta(t)) = \frac{\overline{x}_1 - x(t)}{\overline{x}_1 - \underline{x}_1},\ h_2(\theta(t)) = 1 - h_1(\theta(t)),$$

а матрицы подсистем определяются как

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ \underline{x}_1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ \overline{x}_1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ошибку синхронизации $e(t)$ описывает нечеткая ТС-модель

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(\theta(t))\big(A_i e(t) + B_i u(t)\big). \tag{4}$$

Для обеспечения синхронизации необходимо найти нечеткий регулятор

$$u(t) = \sum_{m=1}^{2} h_i(\theta(t)) K_m e(t)), \tag{5}$$

где K_m, $m = 1{,}2$ – матрицы регуляторов подсистем ТС-модели, которые стабилизируют замкнутую систему

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} h_i(\theta(t)) h_m(\theta(t))\big(A_i + B_i K_m\big)e(t). \tag{5}$$

Осуществление нечеткого ремоделирования дает возможность применить к решению задачи синхронизации теорию сверхустойчивых систем [4]. Нечеткая система (2) является сверхустойчивой, если выполнено условие

$$\min_{i,m}\big(A_i + B_i K_m\big) > 0 .$$

В этом случае справедлива оценка $\| x(t) \|_\infty \le \| x_0 \|_\infty e^{-\sigma_c t}$, где $\sigma_c = \max_{i,m}\big(A_i + B_i K_m\big)$, которая означает монотонное экспоненциальное убывание ∞-нормы решения, которое исключает возможность появления резких «всплесков».

Для замкнутой системы при использовании условий сверхустойчивости задача синхронизации нечетких систем (2) и (3) состоит в нахождении набора сверхстабилизующих матриц K_m, $m = 1{,}2$, обеспечивающих сверхустойчивость системы (5). Применение условий сверхустойчивости дает для каждой матрицы $A_i + B_i K_m$, $i, m = 1{,}2$ систему неравенств

$$-(a_{ii}^{l}+\sum_{s} b_{is}^{l} k_{si}^{m})-\sum_{j\neq i} | a_{ij}^{l}+\sum_{s} b_{is}^{l} k_{sj}^{m} | > 0,\ i=1,2, \qquad (6)$$

которые должны быть выполнены подбором элементами k_{sj}^{m} матрицы K_m. Синхронизирующий нечеткий регулятор может быть найден решением специальной задачи линейного программирования [4]. Следует отметить, что условия сверхустойчивости приводят к достаточно жестким структурным ограничениям на элементы системных матриц и, поэтому, не всегда могут быть выполнены.

Пусть

$$B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда нечеткий регулятор, удовлетворяющий (6), будет иметь вид

$$K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Результаты компьютерного моделирования в среде Mathcad представлены на рисунке 2. Переходной процесс происходит монотонно. Как и требуется ошибка синхронизации $e(t)$ убывает без резких скачков на начальном этапе переходного процесса.

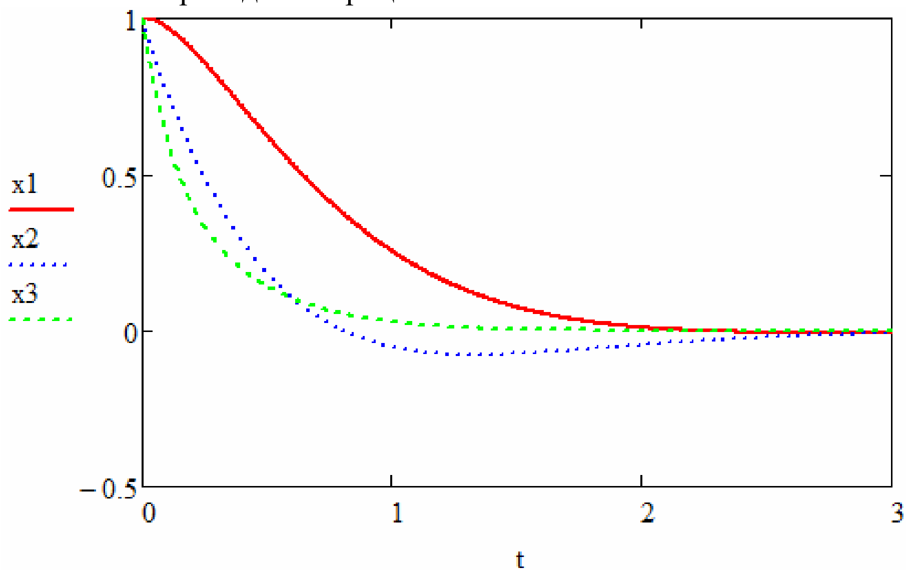

Рис. 2. Динамика ошибки синхронизации двух хаотических систем

Представленный подход к обеспечению синхронизации применим к широкому кругу нелинейных систем, демонстрирующих как регулярную, так и хаотическую динамику.

Список литературы

1. Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. – 246 с.
2. Sprott J.C. Elegant Chaos. Algebraically Simple Chaotic Flows. – Singapore: Word Scientific, 2010. – 302 p.
3. Талагаев Ю.В., Сараев П.В. Ремоделирование нелинейных систем на основе нечетких моделей Такаги-Сугено // Нелинейный мир. – 2020. – Т. 18, Вып. 2. – С. 18-32.
4. Талагаев Ю.В. Анализ и синтез сверхустойчивых нечетких систем Такаги – Сугено // Проблемы управления. – 2016. – № 6. – С. 2-11.

References

1. Network management issues / Edited by A.L. Fradkov. – M.-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2015. – 246 p.
2. Sprott J. C. Elegant Chaos. Algebraically Simple Chaotic Flows. – Singapore: Word Scientific, 2010. – 302 p.
3. Talagaev Yu.V., Saraev P.V. Remodeling of nonlinear systems based on fuzzy Takagi-Sugeno models // Non-linear world. 2020, vol. 18, no. 2, pp. 18-32. doi.org/ 10.18127/j20700970-202002-02.
4. Talagaev Yu.V. Analysis and synthesis of superstable fuzzy Takagi-Sugeno systems // Control Sciences. 2016, no. 6, pp. 2-11.

Талагаев Юрий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики	**Talagaev Yuri Viktorovich** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the Department of mathematics
Швец Дмитрий Александрович – курсант	**Shvets Dmitry Aleksandrovich** – cadet
ytalagaev@yandex.ru	

Received 02.02.2024