

<https://doi.org/10.26160/2474-5901-2023-39-44-51>

## ПОСТРОЕНИЕ ТРАССЫ ИЗЛУЧАТЕЛЯ ПО ДИНАМИКЕ ДОПЛЕРОВСКОГО СДВИГА

*Моисеев А.А.*

*Научно-производственное предприятие «Технос – РМ», Мытищи, Россия*

**Ключевые слова:** доплеровский сдвиг, трасса излучателя, метод счисления, эллиптическая поляризация, пеленг, направляющие косинусы, базис, аппроксимация, ретранслятор, угол возвышения, полосовая фильтрация, полином Чебышева, функции Уолша.

**Аннотация.** Рассмотрено построение трассы мобильного излучателя на основе наблюдаемой динамики доплеровского сдвига. Построение осуществляется методом счисления по компонентам скорости, определяемых на основе доплеровской динамики с учетом поляризации радиолуча. Компонентам скорости сопоставляются линейно независимые базисные функции различного вида. К числу исследованных базисов относились: синусоидальный; дискретный Уолша; кусочно – экспоненциальный; кусочно – степенной; полиномиальный на основе многочленов Чебышева I рода. В ходе численного эксперимента проводилось сравнение эффективности разложений на основе упомянутых базисов в части построения трассы излучателя и оценки кинематических характеристик последней. Установлена предпочтительность синусоидальной и степенной аппроксимации скоростной динамики излучателя, связанная с непрерывностью используемых базисных функций. Наличие разрывов I рода в базисных функциях Уолша и кусочно-экспоненциальных приводит к паразитному смещению контуров, а полиномиальный базис малопригоден для построения визуального отображения, хотя и может быть использован для оценки размеров контролируемой зоны.

## IRRADIATOR TRACK BUILDING ON DOPPLER'S SHIFT DYNAMICS

*Moiseev A.A.*

*Scientific and industrial entertainment "Technos – RM", Mytisch, Russia*

**Keywords:** Doppler's shift, irradiator track, reckoning, elliptical polarization, bearing line, directional cosines, basis, approximation, relay, elevation, band-pass filtering, forcing element, median filter, least square method, Chebyshev polynomial, Walsh functions.

**Abstract.** Track building of mobile irradiator based on Doppler shift dynamics. This building is performed using reckoning method on speed components formed by means of Doppler's dynamics recalculation taking into account radio ray polarization. Speed components confront with different basis functions. Considered bases include: sinusoidal; discrete of Walsh; piecewise-exponential; piecewise-power; based on Chebyshev polynomial. In course of numerical experiment compared effectiveness of decomposition based on different bases for track building and kinematic characteristics estimation. Was determined that sinusoidal and piecewise-power approximations are preferable because of their continuity. Simple discontinuity of the Walsh and piecewise-exponential functions leads to parasite contour's shift and polynomial basis is unavailable for tracks building but can be used for diameter estimation of controllable zone.

В работе рассматривается построение трассы излучателя на основе анализа наблюдаемой динамики доплеровского сдвига. Это построение осуществляется методом счисления [1], т.е. в предположении, что текущие декартовы координаты излучателя определяются интегрированием

соответствующих компонент скоростей. Последние представляют собой результат разложения скоростной динамики излучателя, сформированной на основе исходной частотной. Заметим при этом, что временные зависимости частотной и скоростной динамики являются скалярными и для формирования по ним траектории в картинной плоскости необходимо предварительно задаться естественной системой координат.

Предположим, что радиолуч излучателя поляризован эллиптически [2]. Пусть угол между радиолучом и линией визирования  $AB$  (пеленгом излучателя) составляет  $\alpha$ . В соответствии с рисунком 1 свяжем центр системы координат с положением излучателя  $B$ . Ось  $X$  совмещается с направлением радиолуча, а ось  $Y$  – с малой полуосью эллипса поляризации. Направляющие косинусы линии визирования составляют при этом  $\cos\alpha$  и  $\sin\alpha$ . Линейная независимость базисных функций обеспечивается естественным образом, т.к. разность фаз поляризации по большой и малой оси эллипса составляет  $\pi/2$ , что обеспечивает относительный временной сдвиг в четверть периода. Дополнительным требованием к базисным функциям является также непрерывность, обеспечивающая формирование замкнутых циклов при аппроксимации периодических функций. Поэтому в качестве последних желательно использовать непрерывные функции с аналогичным временным сдвигом, например,  $y_1 = \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$  и  $y_2 = \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ . Эти функции образуют линейную суперпозицию  $v=ay_1+by_2$ , аппроксимирующую скоростную динамику в данной системе координат.

Для пересчета частотной динамики в скоростную воспользуемся соотношением для продольного эффекта Доплера [3]. Из рисунка 2 находим:

$$v \sin \gamma = c \frac{f}{f_0},$$

или 
$$v = c \frac{f}{f_0} \operatorname{cosec} \gamma = c \frac{f}{f_0} \sec\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right), \quad (1)$$

где  $v$  – скорость излучателя;  $f, f_0$  – доплеровский сдвиг и номинальная частота излучателя;  $c$  – скорость света;  $\gamma$  – угол между направлениями на приемник и излучатель.

Выразим  $\gamma$  через угол визирования  $\beta$ . Из теоремы синусов для треугольника  $ABO$  находим [4]:

$$\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\sin(\pi - \beta - \gamma)}{R+h} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{R+h},$$

или  $(R+h) \sin \beta = R \sin(\beta + \gamma).$

Разрешая это уравнение относительно  $\gamma$ , получаем

$$\cos^2 \gamma - 2\left(1 + \frac{h}{R}\right) \sin^2 \beta \cos \gamma + \left(1 + \frac{h}{R}\right) \sin^2 \beta - \cos^2 \beta = 0,$$

$$\text{или } \cos \gamma = \sin^2 \beta \left(1 + \frac{h}{R}\right) + \cos \beta \sqrt{1 - \sin^2 \beta \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2},$$

т.е.  $\gamma \approx \beta$  при малых  $\beta$ .

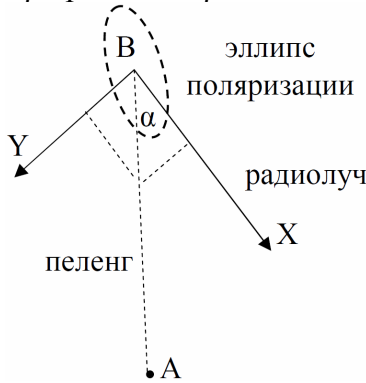


Рис. 1. Ориентация радиолуча

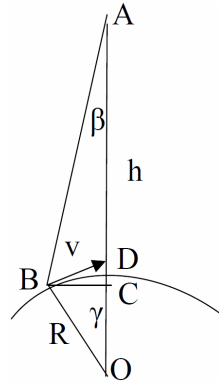


Рис. 2. Условия наблюдения

В этих условиях  $\pi/2 - \gamma$  – угол возвышения ретранслятора относительно центра контролируемой зоны, а его секанс представляет собой поправочный коэффициент  $k$  при пересчете частотной динамики в скоростную. Нетрудно показать, что  $k > \frac{R+h}{R} \approx 7$ , где  $R$  – радиус Земли,  $h$  – высота геостационарной орбиты. В дальнейшем будем принимать  $k = 10$ .

Поскольку угол  $\alpha$  между радиолучом и линией визирования изменяется неконтролируемо, выбор коэффициентов при базисных функциях в аппроксимации скоростной динамики будем выбирать методом наименьших квадратов из условия минимальности квадратичной погрешности используемой аппроксимации [5]:

$$E = \sum_i (ay_1(t_i) + by_2(t_i) - v(t_i))^2 \rightarrow \min_{a,b}. \quad (2)$$

Отсутствие постоянной составляющей в (2) связано с тем, что величина  $v$  наблюдается на выходе полосовой фильтрации, включающей форсирующее звено для подавления низкочастотного тренда и медианный фильтр для подавления высокочастотного шума [6]. Из необходимых условий минимума для (2) получаем:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial E}{\partial a} = 2 \sum_i (ay_1(t_i) + by_2(t_i) - v(t_i))y_1(t_i), \\ 0 = \frac{\partial E}{\partial b} = 2 \sum_i (ay_1(t_i) + by_2(t_i) - v(t_i))y_2(t_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sum_i y_1^2(t_i) + b \sum_i y_1(t_i)y_2(t_i) = \sum_i v(t_i)y_1(t_i), \\ a \sum_i y_1(t_i)y_2(t_i) + b \sum_i y_2^2(t_i) = \sum_i v(t_i)y_2(t_i). \end{cases} \quad (3)$$

или

Решая систему (3), находим искомые коэффициенты  $a, b$ . Для коррекции этих коэффициентов используется выравнивание диапазонов аппроксимируемой функции  $v$  и аппроксимирующей  $y = ay_1 + by_2$  с

использованием корректирующего коэффициента  $c = \left( \frac{\max_i v(t_i) - \min_i v(t_i)}{\max_i y(t_i) - \min_i y(t_i)} \right)^d$ ,

где  $d \in (0, 1)$  – степень коррекции, предназначенная для подавления выбросов аппроксимируемой функции. Коэффициенты разложения при этом трансформируются следующим образом:  $a \rightarrow ac, b \rightarrow bc$ .

Наряду с синусоидальной аппроксимацией с использованием базисных функций  $y_1 = \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right), y_2 = \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ , исследовались также разложения по базисным функциям вида:

– по функциям Уолша [7]  $y_1 = \operatorname{sgn}\left(\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right), y_2 = \operatorname{sgn}\left(\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)$ ;

– по кусочно-экспоненциальным функциям

$$y_1 = \begin{cases} 1 - \exp\left(-10\left\{\frac{t}{T}\right\}\right), \left\{\frac{t}{T}\right\} \leq 0,5, \\ \exp\left(-10\left\{\frac{t}{T}\right\}\right), \left\{\frac{t}{T}\right\} > 0,5; \end{cases} \quad y_2 = y_1\left(t - \frac{T}{4}\right);$$

– по кусочно-степенным функциям

$$y_1 = \begin{cases} 2\left(2\left\{\frac{t}{T}\right\}\right)^p - 1, \left\{\frac{t}{T}\right\} \leq 0,5, \\ 2\left[1 - \left(2\left\{\frac{t}{T}\right\} - 1\right)^p\right], \left\{\frac{t}{T}\right\} > 0,5; \end{cases} \quad y_2 = y_1\left(t - \frac{T}{4}\right);$$

– по полиномам Чебышева I рода [8]

$$y_1 = 2 \frac{u_n(x) - \min_x u_n(x)}{\max_x u_n(x) - \min_x u_n(x)} - 1; \quad y_2 = 2 \frac{u_{n+1}(x) - \min_x u_{n+1}(x)}{\max_x u_{n+1}(x) - \min_x u_{n+1}(x)} - 1;$$

$$u_n = \cos(n \arccos(x)); \quad x = \frac{t}{T}.$$

Качественное поведение базисных функций отображено на рисунке 3. По построению все они непрерывны за исключением функций Уолша и кусочно-экспоненциальных. Особенностью базиса Чебышева является его глобальность, позволяющая аппроксимировать непериодические функции, например, нестационарные процессы. Скоростная динамика излучателя, совершающего циклическое движение, отображалась на выходе полосовой фильтрации. Наряду с ней в целях сравнения отображались:

- синусоидальная аппроксимация;
- дискретная аппроксимация Уолша;
- экспоненциальная аппроксимация;
- степенная аппроксимация;
- полиномиальная аппроксимация.

Построение аппроксимации, а также сравнение аппроксимирующих и аппроксимируемых функций для различных базисов были проведены средствами Excel [9]. Временные зависимости скоростной динамики  $v$  и скорректированной аппроксимации  $zс$  для ситуации циклического движения излучателя приведены на рисунке 4. Они указывают на качественное соответствие построенных аппроксимаций аппроксимируемой динамике.

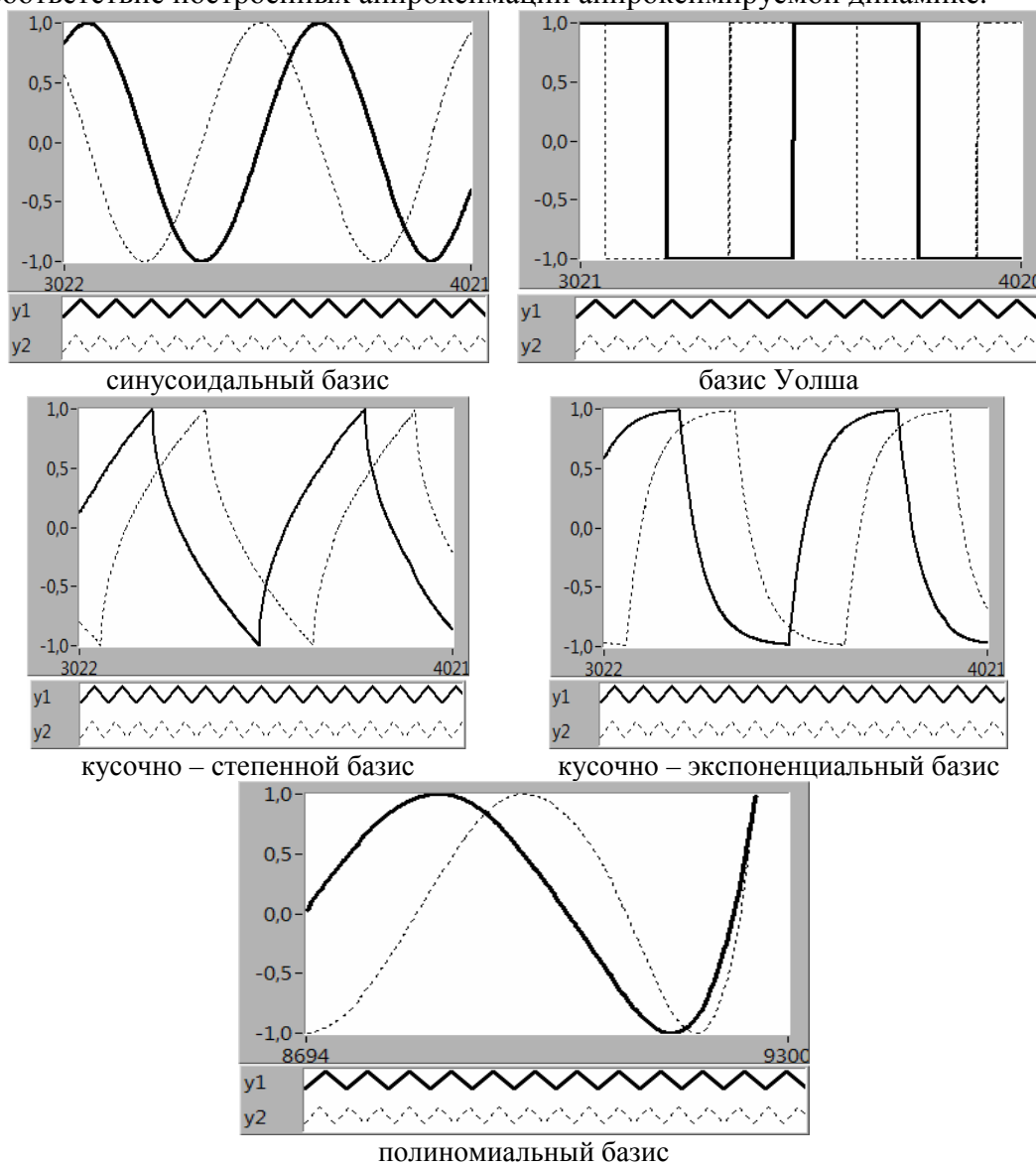


Рис. 3. Базисные функции

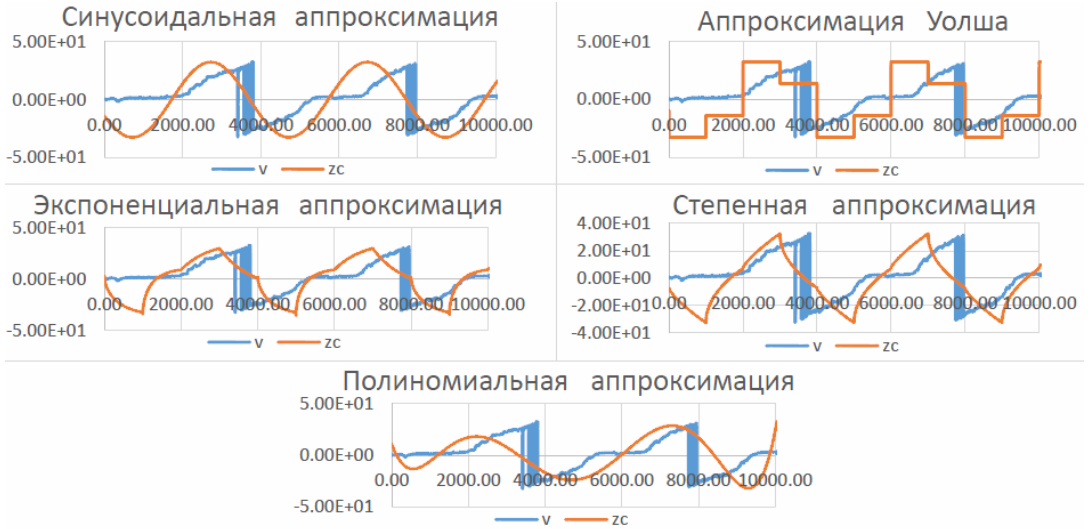


Рис. 4. Аппроксимации скоростной динамики

Расчет текущих координат излучателя и их параметрическое отображение в виде трасс  $(x(t), y(t))$  осуществлялись средствами LabVIEW [10] в соответствии с соотношениями:

$$x_j(t) = a_j \int_0^t y_{1j}(t) dt; \quad y_j(t) = b_j \int_0^t y_{2j}(t) dt,$$

где  $j$  – номер аппроксимации;  $y_{1j}, y_{2j}$  – соответствующие базисные функции;  $a_j, b_j$  – коэффициенты разложения по базису.

Качественный вид трасс для различных аппроксимаций в ситуации циклического движения приведен на рисунке 5. Их сравнение указывает на предпочтительность синусоидальной и степенной аппроксимаций, связанную с их непрерывностью. Разрывы первого рода в случае аппроксимаций Уолша и экспоненциальной порождают паразитное смещение контура, а полиномиальная аппроксимация малопригодна для визуального отображения, хотя и может быть использована для оценки размера контролируемой зоны. Последний оценивался в соответствии с соотношением

$d = \max_j \sqrt{\left(\max_t x_j(t) - \min_t x_j(t)\right)^2 + \left(\max_t y_j(t) - \min_t y_j(t)\right)^2}$ , где  $j$  – номер аппроксимации. В качестве оценки скорости излучателя принималась величина  $V = \max_j \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ , где  $a_j, b_j$  – коэффициенты разложения по базисным

функциям, соответствующие характеру аппроксимации.

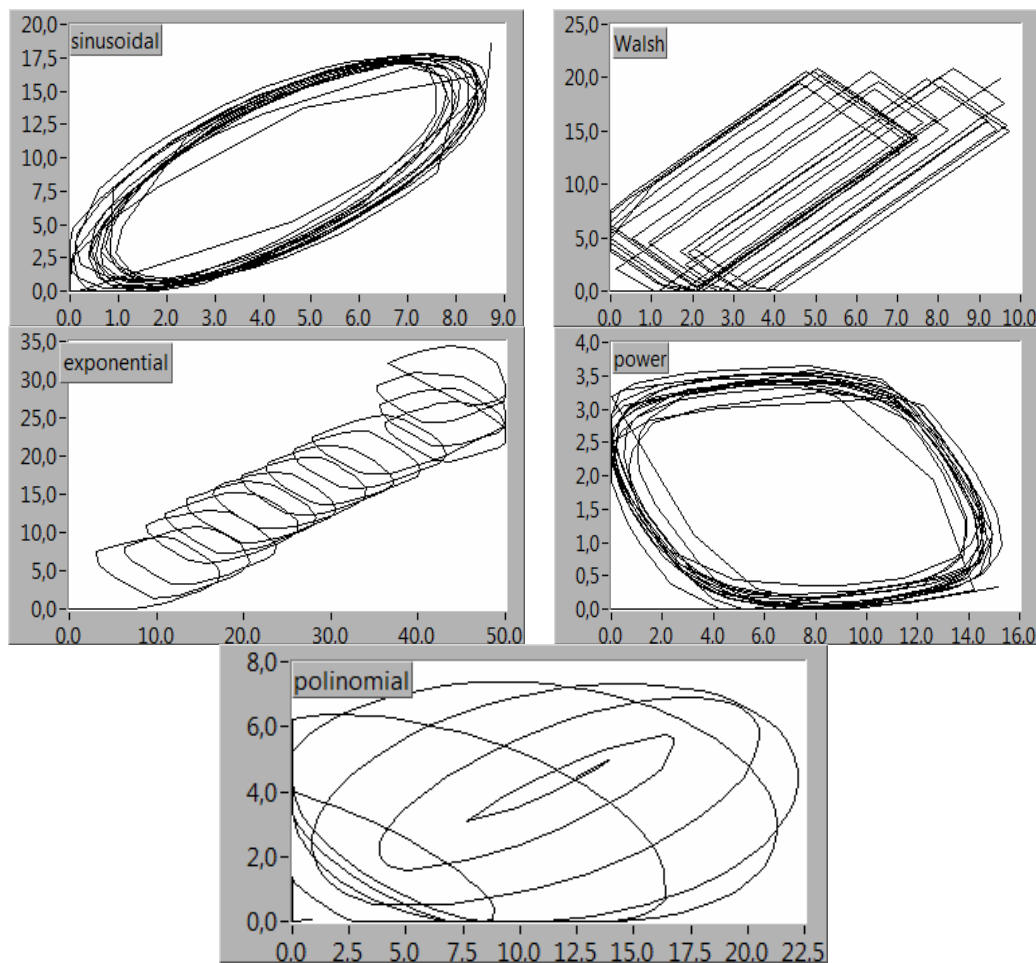


Рис. 5. Трассы излучателя

Таким образом, в ходе численного эксперимента проводилось сравнение эффективности разложений на основе упомянутых базисов в части построения трассы излучателя и оценки кинематических характеристик последней. Установлена предпочтительность синусоидальной и степенной аппроксимации скоростной динамики излучателя, связанная с непрерывностью используемых базисных функций. Наличие разрывов I рода в базисных функциях Уолша и кусочно-экспоненциальных приводит к паразитному смещению контуров, а полиномиальный базис малоприменим для построения визуального отображения, хотя и может быть использован для оценки размеров контролируемой зоны.

### Список литературы

1. Сосновский И.А., Хаймович Э.А. и др. Авиационная радионавигация. – М.: Транспорт, 1990. – 264 с.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1985. – 512 с.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численные решения задач методом наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
6. Моисеев А.А. Медианно-рекурсивная фильтрация // Радиопромышленность. – 2018. – №1. – С. 103-109.
7. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
8. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
9. Вадзинский Р. Статистические вычисления в среде Excel. – СПб.: Питер, 2008. – 608 с.
10. Тревис Дж. LabVIEW для всех. – М.: ДМК, 2005. – 544 с.

### References

1. Sosnovsky I.A., Haimovich E.A., etc. Aviation radio navigation. – М.: Transport, 1990. – 264 p.
2. Pimenov Yu.V, Volman V.I, Mravtscov A.D. Technical electrodynamics. – М.: Radio and communication, 2002. – 536 p.
3. Yavorsky B.M, Detlaf A.A. Handbook on physics. – М.: Science, 1985. – 512 p.
4. Korn G., Korn T. Mathematical handbook. – NY: McGraw – Hill, 1968. – 1152 p.
5. Lawson Ch., Hanson R. Solving least square problems. – NJ: Prentice – Hall, 1974. – 349 p.
6. Moiseev A.A. Median and recursive filtration // Radio Industry. 2018, no. 1, pp. 103-109.
7. Zalmanzon L.A. Fourier, Walsh, Haar transforms and their application. – М.: Science, 1989. – 496 p.
8. Suetin P.K. Classical orthogonal polynomials. – М.: Science, 1979. – 416 p.
9. Vadzinsky R. Statistical calculation in Excel. – SPb.: Piter, 2008. – 608 p.
10. Travis J. LabVIEW for everyone. – NJ: Prentice – Hall, 2002. – 981 p.

<b>Моисеев Александр Александрович</b> – кандидат технических наук, старший научный сотрудник	<b>Moiseev Alexander Alexandrovich</b> – candidate of technical sciences, senior researcher
slow.coach@yandex.ru	

*Received 10.11.2023*