https://doi.org/10.26160/2474-5901-2023-38-15-23

ЧАСТОТНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В ФОРМИРОВАНИИ РЕЖИМОВ С КРАТНЫМ ПОДБРАСЫВАНИЕМ В УПРУГОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ С ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С УЧЕТОМ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЕЙ

Елисеев А.В.[1], Копылов Ю.Р.[2], Миронов А.С.[1]
[1]Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия;
[2]Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

Ключевые слова: неудерживающие связи, взаимодействие твердого тела с вибрирующей поверхностью, обобщенная функция зазора, отношения частот, режимы кратного подбрасывания, порядок отрыва.
Аннотация. Развиваются системные представления об условиях формирования динамических состояний технических объектов с учетом возможности нарушения неудерживающего контакта массоинерционного элемента с вибрирующей поверхностью. Рассматривается модельная задача оценки динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, включающей упругие силы, силы веса и постоянные дополнительные силы. Используются методы теории колебаний, интегральных преобразований Лапласа, теории функции комплексного переменного, системного анализа, теории автоматического управления. Определена роль отношения частот в формировании характеристик зазора между массоинерционным элементов системы и вибрирующей опорной поверхностью. Установлены асимптотические зависимости характеристик режимов с кратным подбрасыванием от частотных и амплитудных безразмерных параметров. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

FREQUENCY RELATIONS IN THE FORMATION OF MODES WITH MULTIPLE TOSSING IN THE ELASTIC INTERACTION OF A MATERIAL PARTICLE WITH A VIBRATING SURFACE, TAKING INTO ACCOUNT UNILATERAL TIES

Eliseev A.V.[1], Kopylov Yu.R.[2], Mironov A.S.[1]
[1]Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia;
[2]Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Keywords: unilateral ties, nteraction of a solid body with a vibrating surface, generalized gap function, frequency ratios, multiple tossing modes, separation order.
Abstract. Systematic ideas are being developed about the conditions for the formation of dynamic states of technical objects, taking into account the possibility of breaking the non-holding contact of the mass-inertia element with the vibrating support surface. The problem of estimating the dynamic interactions of elements of a mechanical oscillatory system, including elastic forces, weight forces and constant additional forces, is considered. The methods of the theory of oscillations, integral Laplace transformations, the theory of the function of a complex variable, system analysis, and the theory of automatic control are used. Within the framework of operational calculus, necessary and sufficient conditions for the implementation of separation based on the generalized gap function are formulated. Analytical conditions characterizing the modes of multiple tossing taking into account elastic interactions are formulated. A classification of modes of tossing a material particle based on the concept of separation order is proposed. The role of the frequency ratio in the formation of the

characteristics of the gap between the mass-inertial elements of the system and the vibrating support surface is determined. Asymptotic dependences of the characteristics of modes with multiple tossing on frequency and amplitude dimensionless parameters are established. The results of computational experiments are presented.

Введение. В изучении динамики механических систем особое внимание уделяется неудерживающим связям, определяющим особенности взаимодействий между элементами одной или нескольких систем, что отражено в работах по теоретической [1] и аналитической механике [2]. Неудерживающие связи являются одним из ключевых факторов, определяющих динамические состояния технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений [3]. Оценка, формирование и коррекция условий нарушения и реализации контакта в механических колебательных системах с неудерживающими связями способствуют разработке методов повышения динамического качества работы транспортных и технологических машин [4-6]. Задачи моделирования взаимодействий элементов с учетом возможности формирования зазоров находят свои приложения в процессах вибрационного упрочнения деталей технических объектов [7]. Ряд вопросом, посвященных неудерживающим связям, рассматривался в работах, развивающих представления о формах движения элементов системы в рамках представлений о статических и динамических реакциях, необходимых и достаточных условиях отрыва материальной частицы, постоянных силы и сил вязкого трения [8-12].

Вместе с тем, особенности реализации неудерживающих связей в системах, совершающих вынужденные колебания с учетом упругих сил, ещё не получили достаточного уровня детализации в плане определения роли частотных отношений в формировании режимов непрерывного подбрасывания.

Статья посвящается развитию представлений об условиях нарушения контакта материальной частицы с опорной вибрирующей поверхностью в формировании периодических режимов с непрерывным подбрасыванием в зависимости от особенностей упругих взаимодействий и постоянных сил.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная материальной частицей m, упругим элементом k, демпфером b, устройством для преобразования движения L и подвижной опорной поверхность h, совершающей гармонические колебания. К телу m приложена дополнительная постоянная сила Q (рис. 1). Между материальной частицей, способной совершать вертикальные поступательные движения, и подвижной поверхностью реализуется неудерживающий контакт. В начальный момент времени материальная частица находится в контакте с поверхностью и обладает скоростью равной скорости поверхности. В зависимости от частоты и амплитуды колебания опорной поверхности материальная частица, либо находится в контакте с поверхностью, либо совершает отрыв и свободно двигается до момента падения на поверхность. Удар о поверхность считается абсолютно неупругим. В момент контакта с поверхностью частица мгновенно принимает скорость поверхности.

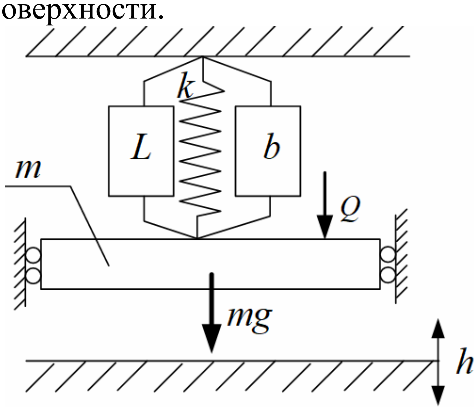

Рис. 1. Механическая колебательная система

Задача заключается в разработке метода, позволяющего определять условия нарушения контакта в зависимости от параметров системы и оценивать возможные режимы движения материальной частицы во взаимодействии с опорной поверхностью с учетом упругих сил, сил трения, постоянных дополнительных сил и устройства для преобразования движения.

II. Математическая модель. Для определения условий отрыва рассматривается семейство систем дифференциальных уравнений, начальные данные которых определяется кинематическими характеристиками точки вибрирующей поверхности:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_{t_0}(\tau) + L\ddot{y}_{t_0}(\tau) + b\dot{y}_{t_0}(\tau) + ky_{t_0}(\tau) = -mg - Q; \\ y_{t_0}(\tau)\Big|_{\tau=0} = A\sin(\omega t_0); \\ \dot{y}_{t_0}(\tau)\Big|_{\tau=0} = \omega A\cos(\omega t_0), \end{cases} \tag{1}$$

где t_0 – момент времени, рассматриваемый как параметр системы.

Критерием отрыва служит положительный зазор между точкой опорной поверхности и материальной частицы [9]. Момент отрыва определяется методом обобщенной функции зазора:

$$R_{t_0}(\tau) = y_{t_0}(\tau) - h_{t_0}(\tau), \tag{2}$$

где $h_{t_0}(\tau) = A\sin(\omega(t_0 + \tau))$ – форма колебания опорной поверхности, $y_{t0}(\tau)$ – движение материальной частицы в зависимости от длительности свободного движения τ с начальными условиями, заданными в момент времени t_0.

Ш. Особенности формирования отрыва с учетом упругих взаимодействий и постоянных сил. Рассматривается вариант упругих и постоянных сил (L = 0, b = 0).

Условия отрыва 2-ого порядка зависят от соотношения частот ω_0, ω:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) A\sin(\omega t_0) > a\,, \tag{3}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота собственных колебания системы в условиях отсутствия связи со стороны вибрирующей поверхности, $a = g + \frac{Q}{m}$ – параметр постоянных сил.

На рисунке 2 представлены фазы отрыва из точек 2-ого порядка для параметров $a > 0$ и $\omega > \omega_0$.

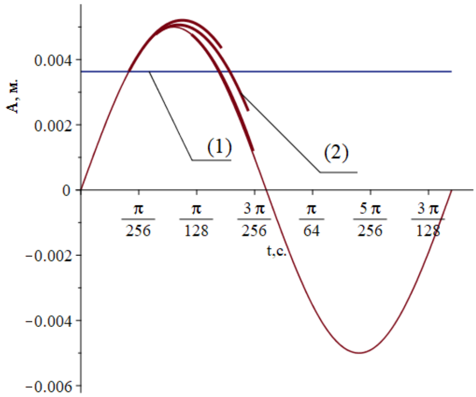

Рис.2. Фазы отрывов 2-ого порядка для $a > 0$, $\omega > \omega_0$; 1 – критический уровень отрыва $a/\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)A\right)$; 2 – движение с отрывом точек, искусственно помещенных на поверхность

В зависимости от параметра постоянных сил a и взаимного расположения частот ω_0, ω изменяется фаза отрыва 2-его порядка, принимая значения в I, II, III или IV четвертях периода [0…2π].

Определяющим фактором с учетом упругих взаимодействий отрыва служит критический уровень равный $a/\left(\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)A\right)$, принимающий положительные и отрицательные значения в зависимости от соотношения частот ω_0, ω и значения амплитуды A по отношению к параметру a/ω_0^2, имеющего размерность длины.

Условия отрыва 3-его порядка имеют вид:

$$\begin{cases} \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)A\sin(\omega t_0) = a; \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cos(\omega t_0) > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Условия (4) определяют фазу отрыва в зависимости от частот ω, ω_0 и параметра постоянных сил a.

Ключевой характеристикой, определяющей особенности формирования зазора является отношение частоты внешнего возмущения ω к частоте собственных колебаний системы ω_0:

$$\alpha = \omega/\omega_0. \tag{5}$$

Дополнительно к параметру α может быть использован безразмерный параметр γ, характеризующий амплитуду A колебания опорной поверхности по отношению к величине A_0:

$$\gamma = \frac{A}{A_0}, \qquad (6)$$

где $A_0 = a/\omega_0^2$ – параметр системы.

С помощью безразмерных параметров α > 1 и γ > 0 условия отрыва 2-ого и 3-его порядков могут быть представлены в виде:

$$\sin(\varphi_0) > \frac{1}{\gamma(\alpha^2 - 1)} \qquad (6),$$

$$\begin{cases} \sin(\varphi_0) = \dfrac{1}{\gamma(\alpha^2 - 1)}; \\ (\alpha^2 - 1)\cos(\varphi_0 > 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где φ_0 – фаза отрыва.

В безразмерных переменных α и γ границы области отрыва определяются функцией:

$$\gamma = \pm \frac{1}{(\alpha^2 - 1)}. \qquad (8)$$

Существенный интерес представляют режимы с кратным подбрасыванием, когда фаза отрыва от поверхности совпадает с фазой падения на поверхность, что приводит к реализации периодического режима с непрерывным подбрасыванием.

IV. Режимы кратного подбрасывания. Условия формирования кратного подбрасывания определяются на основе равенства:

$$y_{t_0}(0) = y_{t_0}\left(\frac{2\pi k_0}{\omega}\right), \qquad (9)$$

где k_0 – кратность подбрасывания, обозначающая, во сколько раз период подлета превышает период колебания поверхности.

Условия кратного подбрасывания (9) могут быть преобразованы к виду:

$$(\alpha\gamma)^2 \frac{1 - S_1^2}{(1 + \gamma S_1)^2} = \frac{1 - C_2(k_0)}{1 + C_2(k_0)}, \qquad (10)$$

где $S_1 = \sin(\omega t_0)$, а величина $C_2(k_0) = \cos\left(2\pi k_0 \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ – рассматривается как функция независимого параметра кратности k_0.

Моменты отрыва 2-го порядка, обеспечивающие режимы кратного подбрасывания k_0, определяются на основе выражения:

$$t_0(k_0) = \frac{\arcsin(S_1(k_0))}{\alpha\omega_0}, \qquad (11)$$

где $S_1(k_0) = \dfrac{-\beta(k_0)\gamma + \sqrt{\beta(k_0)\gamma^2 - \beta(k_0) + 1}}{\beta(k_0)\gamma^2 + 1}$, $\beta(k_0) = \dfrac{1}{(\alpha\gamma)^2} \cdot \dfrac{1 - C_2(k_0)}{1 + C_2(k_0)}$ – вспомогательные функции.

Наравне с функцией $t_0(k_0)$ (11), сопоставляющей фиксированной кратности момент отрыва, может быть рассмотрена обратная функция $k_0(t_0)$, ставящая в соответствие моменту отрыва кратность:

$$k_0(t_0) = \frac{\alpha}{2\pi}\arccos\lambda(t_0)\,, \tag{12}$$

где $\lambda(t_0) = (\alpha\gamma)^2 \dfrac{1-\left(S_1(t_0)\right)^2}{\left(1+\gamma S_1(t_0)\right)^2}$ – вспомогательная функция, а t_0 рассматривается в интервале времени:

$$t_0 \in \left(\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{1}{\gamma(\lambda^2-1)}\right), \frac{\pi}{2\omega}\right). \tag{13}$$

Каждому моменту времени, определенному из $k_0(t_0) = k_0$, соответствует форма отрыва с кратным подбрасыванием (рис. 3, линии 1-4) с отрывом 2-ого порядка. Вместе с тем, отрыв 3-его порядка не обязательно формирует для выбранных параметров режим с кратным подбрасыванием (рис. 5, линия 5).

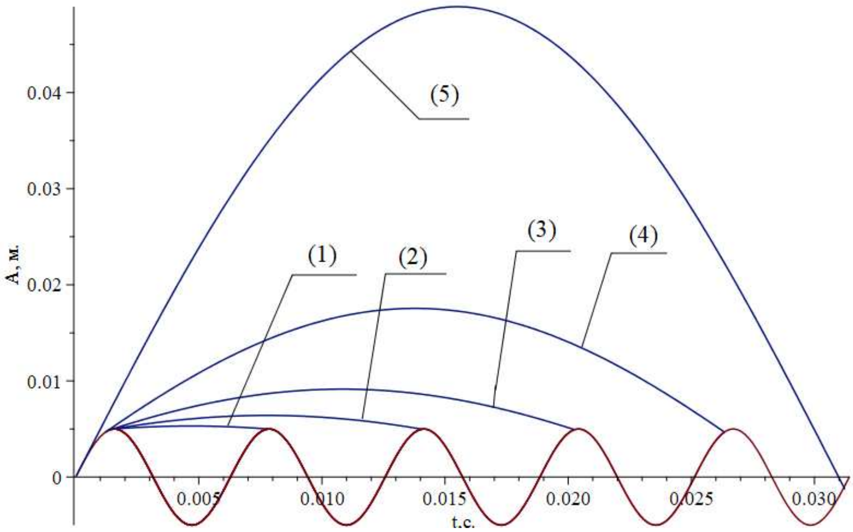

Рис. 3. A = 0,005 м, k = 10000 Н/м, m = 1 кг, ω_0 = 100 рад/с, ω = 1000 рад/с, Q =1 Н, a = 10,8 м/с^2, A_0 = 0,00108 м, γ = 4,629, α = 10

Реализация режима с кратным подбрасыванием с отрывом 3-его порядка требует выполнения дополнительных условий на параметры α, γ.

Построение отрыва 3-его порядка предполагает учет условий

$$\sin(\omega t_0) = \frac{a}{A\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\,, \tag{14}$$

$$\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\cos(\omega t_0) > 0. \tag{15}$$

Подстановка условий (14) реализации отрыва 3-его порядка в уравнение (10) приводит к выражению:

$$C_2(k_0)=\frac{\alpha^2-\gamma^2(\alpha^2-1)^2+1}{\alpha^2+\gamma^2(\alpha^2-1)^2-1}. \qquad (16)$$

Обращение функции (16) позволяет рассматривать кратность в зависимости от параметров α, γ:

$$k_0(\alpha,\gamma)=\frac{\alpha}{2\pi}\arccos\left(\frac{\alpha^2-\gamma^2(\alpha^2-1)^2+1}{\alpha^2+\gamma^2(\alpha^2-1)^2-1}\right). \qquad (17)$$

Характеристика γ, рассматриваемая как функция кратности k_0 и параметра α, имеет вид:

$$\gamma(\alpha)=\sqrt{\frac{\alpha^2+1-\cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right)(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)^2\left(\cos\left(\frac{2\pi k_0}{\alpha}\right)+1\right)}}, \qquad (18)$$

где $\alpha>2k_0$. Функция γ(α) определяет для каждого параметра α значение параметра γ, обеспечивающего режим отрыва 3-его порядка с подбрасыванием заданной кратности k_0.

Выбор параметров, обеспечивающих заданную кратность подбрасывания, позволяет реализовывать режимы с периодическим подбрасыванием с отрывом из точек 3-его порядка (рис. 4).

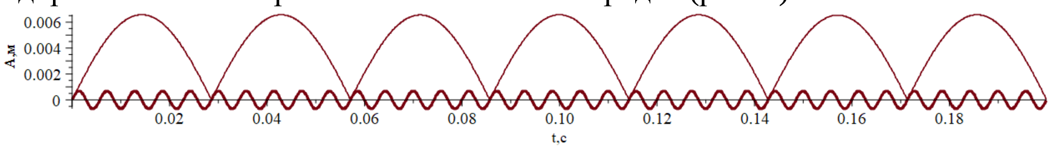

Рис.4. Режим подбрасывания с кратностью 5 с отрывом третьего порядка:
A = 0,00069 м, k = 10000 Н/м, m = 1 кг, ω_0 = 100 рад/с, ω = 610 рад/с, Q = 9,8 Н,
a = 10,8 м/с^2, α = 11, γ = 0,637, A_0 = 0,00108 м

На основе аналитических отношений, устанавливающих зависимости ключевых характеристик режимов подбрасывания от параметров системы α и γ, могут быть представлены асимптотические оценки, к примеру:

$$k_0(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{\pi\gamma}-\frac{3A_0\gamma^3-1}{3A_0\gamma^3\alpha^2\pi}+O\left(\frac{1}{\alpha^4}\right), \alpha\to\infty. \qquad (19)$$

Отношение (19) позволяют оценивать характеристики периодических режимов с кратным подбрасыванием в зависимости от безразмерных амплитудно-частотных параметров системы.

Выводы. На основе разработанного метода решения задач с подбрасыванием с учетом упругих взаимодействий и постоянных сил могут быть сделаны следующие выводы.

1. Исследование отрыва материальной частицы сводится к оценке знаков функции обобщенного зазора, представляющей собой знакопеременную разницу между возможными точками свободных движений частицы с

начальными условиями, определяемыми формами движения опорной поверхности, и точками поверхности колебания.

2. Критерий отрыва материальной частицы от поверхности позволяет классифицировать множество точек отрыва. Классификация точек отрыва предопределяет классификацию режимов периодических подбрасываний с периодами, кратными периодам колебания опорной поверхности.

3. В системе с неудерживающими связями, изменение относительного расположения частоты колебания опорной поверхности относительно собственной частоты системы является ключевым фактором в формировании широкого класса эффектов, проявляющихся в формировании периодической режимов взаимодействий материальной частицы с опорной поверхностью.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 2. Динамика. – М.: Наука, 1968. – 638 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Наука. 1986. – 516 с.
3. Блехман И.И., Джаналидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1968. – 316 с.
4. Елисеев С.В., Лоткин О.И. Условия существования и нарушения контакта для систем с неудерживающими связями // Труды ОМИИТа. – 1966. – Вып. 69. – С. 93-99.
5. Елисеев С.В., Марков К.К. Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неудерживающих связях // Механика и процессы управления. – Иркутск: ИПИ, 1971. – С. 71-83.
6. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск: НИЦ Регуларная и хаотическая динамика, Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.
7. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж: ИПЦ Научная книга, 2011.–568 с.
8. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей. – Новосибирск: Наука, 2015. – 332 с.
9. Ситов И.С., Елисеев А.В. Теоретические основы процессов взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью с неудерживающими связями // Системы. Методы. Технологии. – 2012. – №4 . – С 19-29.
10. Елисеев С.В., Елисеев А.В. Обобщенные подходы в задачах определения контактных реакций в твердых телах при статических нагрузках с учетом неудерживающих связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4. – С. 51-60.
11. Елисеев А.В., Выонг К.Ч. Некоторые возможности управления одномерным вибрационным полем технологической машины // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1. – С. 33-41.
12. Елисеев А.В. Технология оценки свойств динамического взаимодействия в контактах составных твердых тел // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. – 2014. – № 1-2. – С. 179-183.

References

1. Loitsyansky L.G., Lurie A.I. Course of theoretical mechanics: in 2 t. T. 2 Dynamics. – M.: Science, 1968. – 638 p.
2. Lurie A.I. Analytical mechanics. – M.: Science. 1986. – 516 p.
3. Blekhman I.I., Dzhanalidze G.Yu. Vibrational displacement. – M.: Science, 1968. – 316 p.
4. Eliseev S.V., Lotkin O.I. Conditions of existence and violation of contact for systems with non–holding connections // Proceedings of OMIIT. 1966, Issue 69, pp. 93-99.
5. Eliseev S.V., Markov K.K. Some questions of the dynamics of the oscillatory process with unstoppable bonds // Mechanics and control processes. 1971, pp. 71-83.
6. Panovko G.Ya. Dynamics of vibrational technological processes. – M.-Izhevsk: SIC Regularnaya and chaotic dynamics, Institute of Computer Technologies, 2006. – 176 p.
7. Kopylov Yu.R. Dynamics of vibration-shock hardening processes: monograph. – Voronezh : CPI Scientific Book, 2011. – 568 p.
8. Eliseev A.V., Selvinsky V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems taking into account unstoppable connections. – Novosibirsk: Science, 2015. – 332 p.
9. Sitov I.S., Eliseev A.V. Theoretical foundations of the processes of interaction of a material particle with a vibrating surface with unstoppable bonds // Systems. Methods. Technologies. 2012, no. 4, pp. 19-29.
10. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Generalized approaches to the problems of determining contact reactions in solids under static loads, taking into account non-holding bonds // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2013, no. 4, pp. 51-60.
11. Eliseev A.V., Vyong K.Ch. Some possibilities of controlling a one-dimensional vibration field of a technological machine // Modern technologies. System analysis. Modeling. 2016, no. 1, pp. 33-41.
12. Eliseev A.V. Technology for assessing the properties of dynamic interaction in the contacts of composite solids // Scientific problems of transport in Siberia and the Far East. 2014, no. 1-2, pp. 179-183.

Елисеев Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры математики	**Eliseev Andrey Vladimirovich** – candidate of technical sciences, associate professor of mathematics
Копылов Юрий Романович – доктор технических наук, профессор кафедры технологии машиностроения	**Kopylov Yuriy Romanovich** – doctor of technical sciences, professor of department of mechanical engineering
Миронов Артем Сергеевич – соискатель, НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования	**Mironov Artem Sergeevich** – applicant, REC of modern technologies, system analysis and modeling
eavsh@ya.ru	

Received 03.11.2023