https://doi.org/10.26160/2474-5901-2023-37-26-33

РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПО БЛОКАМ

Садовников Н.В., Будимирова Т.С.
Филиал военной академии материально-технического обеспечения,
Пенза, Россия

Ключевые слова: разложение общего логического определителя по элементам, блочное разложение логического определителя, иерархическая процедура вычисления логического определителя, сложность вычисления логического определителя, дихотомическая процедура, число этапов в оптимальной процедуре.
Аннотация. Рассматривается возможность разложения логических определителей по блокам в отличие от традиционного разложения по элементам. Определяя порядок блок – логических определителей, выбираемых на каждом шаге иерархической процедуры раскрытия логического определителя, а соответственно, и общее число шагов, выбираем эти параметры так, чтобы минимизировать получаемое выражение логического определителя. Выяснили, что минимальной по сложности оказывается та из многоэтапных процедур отыскания выражения бесконечного логического определителя, у которой на каждом этапе в группы объединяются по две строки (общее число строк уменьшается вдвое). Это дихотомическая процедура.

DECOMPOSITION OF LOGICAL DETERMINANTS INTO BLOCKS

Sadovnikov N.V., Budimirova T.S.
Branch of the Military Academy of Logistics, Penza, Russia

Keywords: element decomposition of a common logical determinant, block decomposition of a logical determinant, hierarchical procedure for computing a logical determinant, complexity of computing a logical elements, dichotomous procedure, number of steps in the optimal procedure.
Abstract. The possibility of decomposition of logical determinants by blocks is considered, in contrast to the traditional decomposition by elements. Determining the order of block- logical determinants selected at each step of the hierarchical procedure for expanding the logical determinant, and, accordingly, the total number of steps, we choose these parameters in such a way as to minimize the resulting expression of the logical determinant. Found out that the minimum in complexity is that of the multi-stage procedures for finding the expression of an infinite logical determinant, in which at each stage two rows are combined into groups (the total number of rows is halved). It is dichotomous procedure.

Кроме рассмотренных ранее [1, 2] разложений общего логического определителя (ЛО) по элементам, возможны более общие разложения ЛО [3], а именно разложения по блокам.

Сформулируем теорему 1: Пусть $A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qi_q} & \dots \end{vmatrix}^{(r)}$ – общий <u>бесконечный</u> ЛО q-го порядка r-го ранга. Пусть $A_{d,b}^s$ – блок ЛО s-го ранга, составленный из строк d, $d+1,\ldots, b$ в ЛО A_q^r. Тогда справедливо следующее разложение ЛО A_q^r в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) бесконечнозначной логики (ДНФ БЛ):

$$A_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} S_i = i+p-1} A_{1,k_1}^{s_1} \quad A_{k_1+1,k_2}^{s_2} \cdots A_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}, \qquad (1)$$

$$A_q^r = \begin{vmatrix} A_{1,k}^{1} & \cdots & A_{1,k_1}^{i_1} & \cdots \\ A_{k_1+1,k_2}^{1} & \cdots & A_{k_1+1,k_2}^{i_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k_{p-1}+1}^{1} & \cdots & A_{k_{p-1}+1,q}^{i_p} & \cdots \end{vmatrix}^{(r)}.$$

Рассматривая теперь блоки $A_{d,b}^{s}$ как элементы ЛО A_q^r, раскрываем его по формуле

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i_1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qi_q} & \cdots \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{\sum_{i=1}^{q} i_q = r+q-1} a_{1i_1} \cdots a_{qi_q}. \qquad (*)$$

Т.е. ЛО равен дизъюнкции всех конъюнкций, включающих по одному элементу из каждой строки, что сумма их вторых индексов постоянна и равна $r+q-1$. В результате получим (1).

Теорема 2. Пусть $A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)}$ – общий конечный ЛО q-го порядка r-го ранга. Тогда справедливо следующее разложение определителя A_q^r в ДНФ БЛ

$$A_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} \frac{M_1}{A} \quad \ldots \qquad (2)$$

Здесь M_i – число элементов в соответствующем блок – ЛО $A_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_1}$, а запись $A_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i}$ означает, что ЛО $A_{k_{i-1}+1,k_i}^{s_i}$ не входит в те конъюнкции, для которых из условия на Σs_i формально получается $s_i > M_i$. Доказательство повторяет ход доказательства теоремы 1, но с раскрытием ЛО по формуле

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{\sum_{i=1}^{1} i_k = r+q-1} a_{1i_1}^{m_1} \dots a_{qi_q}^{m_q} \qquad (**),$$

где запись $a_{ki_k}^m$ означает, что элемент a_{ki_k} не входит в те конъюнкции, для которых из условия на сумму вторых индексов формально получается $i_k > m$.

Изменяя число p, блок – ЛО $A_{d,b}^s$ в правой части (2) и их порядок, можно получить разные выражения для ЛО A_q^r.

Полагая, что в правой части формул (1), (2) имеется произвольное число ЛО $A_{d,b}^s$ произвольного порядка, получаем наиболее общее представление ЛО A_q^r через ЛО $A_{d,b}^s$ низшего порядка. Это представление не содержит в явном виде элементов a_{ij} ЛО A_q^r. Однако ЛО $A_{d,b}^s$ в (1), (2) можно снова представить по таким же формулам – например, для бесконечного ЛО

$$A_{d,b}^s = \bigvee_{\sum_{i=1}^{c} l_i = s+c-1} A_{d,l_1}^{l_1} A_{l_1+1,l_2}^{l_2} \dots A_{l_{c-1}+1,b}^{l_c} \qquad (3)$$

Выразим их тем самым через ЛО еще меньшего порядка и т.д., пока не придем к ЛО первого порядка, т.е. с элементами a_{ij}.

Описанную процедуру вычисления общего логического определителя естественно назвать иерархичным. С ее помощью, варьируя порядок и число блок – ЛО $A_{d,b}^s$, выбираемые на каждом шаге, можно получить разнообразные выражения ЛО $A_{d,b}^s$ через его элементы, различающиеся по виду и сложности друг от друга и от ранее полученных выражений.

В рассмотренной многошаговой иерархической процедуре раскрытия ЛО не определили порядок блок – ЛО, выбираемых на каждом шаге и соответствующее общее число шагов. Выберем теперь эти параметры так, чтобы минимизировать получаемое выражение ЛО. С этой целью рассмотрим указанную процедуру подробнее. Алгоритм вычисления общего бесконечного ЛО q – го порядка и r – го ранга A_q^r, основанный на разложении (1) состоял в следующем. На первом этапе строки в A_q^r группируются так: первые q_1 строк образуют первую группу, следующие q_2 строк – вторую, …, последние q_p строк – p-ю группу. Из каждой группы строк составляются соответствующие ЛО $A_{q_1}^s(1), A_{q_2}^s(1), \dots, A_{q_p}^s(1)$, которые затем выражаются по формуле (4):

$$A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qi_q} & \dots \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{\sum_{i=1}^{q} i_q = r+q-1} a_{1i_1} \dots a_{qi_q} \qquad (4)$$

(т.е. равен дизъюнкции всех конъюнкций, включающих по одному элементу из каждой строки, что сумма их вторых индексов постоянна и равна $r+q-1$). Через элементы a_{ij} для всех значений ранга s, не превышающих r.

В результате получается p $(p<q)$ новых строк, составленных из найденных ЛО, расположенных в порядке возрастания ранга:

$$\begin{matrix} A_{q_1}^1(1) & A_{q_1}^2(1) & \dots & A_{q_1}^r(1), \\ A_{q_2}^1(1) & A_{q_2}^2(1) & \dots & A_{q_2}^r(1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q_r}^1(1) & A_{q_r}^2(1) & \dots & A_{q_r}^r(1). \end{matrix} \qquad (5)$$

На втором этапе группируются строки (5) из ЛО, полученные на первом этапе: первые l_1 строк образуют первую группу, следующие l_2 строк – вторую, …, последние l_d строк – d-ую группу. Эти группы образуют соответствующие ЛО $A_{l_1}^s(2), A_{l_2}^s(2), \dots, A_{l_d}^s(2)$. Последние по формуле (1) выражаются через найденные на первом этапе ЛО меньших порядков $A_q^k(1)$ для всех значений ранга $k \le r$. В результате получаем $d(d < p)$ новых строк, составленных из полученных ЛО, упорядоченных по возрастанию ранга:

$$\begin{matrix} A_{l_1}^1(2) & A_{l_1}^2(2) & \dots & A_{l_1}^r(2), \\ A_{l_2}^1(2) & A_{l_2}^2(2) & \dots & A_{l_2}^r(2), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{l_d}^1(2) & A_{l_d}^2(2) & \dots & A_{l_d}^r(2). \end{matrix} \qquad (6)$$

Последующие этапы выполняются аналогично второму: группируются строки (6) из ЛО $A_{l_i}^k(2)$ и т.д. Наконец, на последнем ν-ом этапе строки из упорядоченных по рангам ЛО

$$\begin{matrix} A_{f_1}^1(\nu-1) & A_{f_1}^2(\nu-1) & \dots & A_{f_1}^r(\nu-1), \\ A_{f_2}^1(\nu-1) & A_{f_2}^2(\nu-1) & \dots & A_{f_2}^r(\nu-1), \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{f_m}^1(\nu-1) & A_{f_m}^2(\nu-1) & \dots & A_{f_m}^r(\nu-1), \end{matrix} \qquad (7)$$

полученные на $(\nu-1)$-ом этапе, не группируются, а рассматриваются как одно множество строк. Из множества (7) составляется единственный ЛО $A_m^r(\nu)$ порядка m ранга r, который по формуле (1) выражается через найденные на $(\nu-1)$-м этапе ЛО $A_{f_i}^k(\nu-1)$. В результате получается искомое выражение ЛО A_q^r через его элементы. Вычислив это выражение, тем самым вычислим ЛО A_q^r.

Определим число этапов и число строк в группе на каждом этапе так, чтобы минимизировать сложность выражения (вычисления) ЛО A_q^r. Пусть на каждом этапе строки объединились в группы по k строк. Найдем значение $k=k_{\min}$, минимизирующее указанную сложность. На первом этапе имеем $p_1=\dfrac{q}{k}$ различных ЛО $A_{q_i}^s, i=1,\ldots,p_1$, каждый из которых надо вычислить для значений ранга $s\le r$. Поэтому сложность первого этапа $\left(\dfrac{q}{k}\right)\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i$, где $\tilde{N}_k^i$ – сложность вычисления по формуле общего бесконечного ЛО порядка k ранга i, рассмотренного ранее.

На втором этапе имеем $p_2=\dfrac{p}{k}=\dfrac{q}{k^2}$ различных ЛО $A_{l_i}^s, i=1,\ldots,p_2$, вычисляемых для рангов $s\le r$. Отсюда сложность второго этапа $\dfrac{q}{k^2}\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i$. Аналогично анализируется третий этап – его сложность $\dfrac{q}{k^3}\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i$ и т.д. На предпоследнем этапе имеем k различных ЛО (каждый рангов $s\le r$) с общей сложностью вычислений $k\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i$. На последнем этапе имеем $\dfrac{k}{k}=1$ ЛО k-го порядка, единственного ранга r. Сложность его вычисления $\tilde{N}_k^r$. Таким образом, сложность вычисления ЛО A_q^r по предлагаемой процедуре

$$\tilde{N}=\left(\frac{k+k^2+\ldots+q}{k}\right)\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}_i^k+\tilde{N}_k^r. \tag{8}$$

Для $\sum\limits_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i$ имеем такое выражение:

$$\sum_{i=1}^{r}\tilde{N}_k^i=\sum\left(kC_{k+i-2}^{k-1}-1\right)=kC_{k+r}^{r-1}-r\,.$$

Подставляя это значение и значение $\tilde{N}_k^r$ в (8), после суммирования прогрессии найдем:

$$\tilde{N}=\frac{\left(kC_{k+r-1}^{r-1}-r\right)\left(q-k\right)}{k-1}+kC_{k+r-2}^{r-1}-1\,. \tag{9}$$

Выразив в (9) C_m^n через факториалы, найдем, что при $q,r\to\infty$

$$\tilde{N}=\frac{r^k\left(q-k\right)}{\left(k-1\right)\left(k-1\right)!}\,. \tag{10}$$

Из (10) следует, что $\tilde{N}$ минимально при $k=k_{опт}=2$.

Таким образом, минимальной по сложности оказывается та из многоэтапных процедур отыскания выражения бесконечного ЛО, у которой на каждом этапе в группы объединяются по две строки (общее число строк уменьшается вдвое).

Это дихотомическая процедура. Формула, по которой вычисляются получающиеся на этапе ЛО второго порядка:

$$A_2^r=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\end{vmatrix}^{(s)}=\bigvee_{i+j}a_{1i}a_{2j}\,. \tag{11}$$

Поскольку на каждом этапе общее число строк уменьшается вдвое, общее число этапов в оптимальной процедуре составляет:

$$\alpha=\log_2 q\,. \tag{12}$$

Так как алгоритм вычисления общего конечного ЛО q-го порядка r-го ранга A_q^r, основанный на разложении (2), принципиально не отличается от рассмотренного алгоритма вычисления бесконечного ЛО на основе разложения (1) и сводится к выполнению двух операций: 1). Группировка строк имеющегося ЛО и образование из каждой группы строк своего ЛО; 2). вычисление полученных ЛО для последовательных значений ранга s=1,2…., что дает новые строки. При этом на последнем этапе все имеющиеся строки образуют единый ЛО, который вычисляется для единственного значения ранга $s=r$. Некоторые отличия алгоритма, обусловленные конечностью ЛО A_q^r таковы: а) на каждом этапе, включающем две указанные операции, операция 2) выполняется не по формуле (1), а по формуле (2); б) на первом, втором, k-m,…, предпоследнем этапах вычисление каждого ЛО ведется для значений ранга s=1,2,…, r, если $r\le n(k)$ (где $n(k)$ – число элементов в ЛО на k-ом этапе), и для значений ранга $s=1,2,...,n(k)$, если $r>n(k)$. Как и для бесконечного ЛО, примем, что такая процедура вычисления ЛО минимальна по сложности. Формула, по которой вычисляются получающиеся на этапе ЛО второго порядка, аналогична (11)

$$A_2^s = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_1} \\ a_{21} & \dots & a_{2m_2} \end{vmatrix}^{(s)} = \bigvee_{i+j=s+1} a_{1i}^{m_1} a_{2j}^{m_2}\,. \qquad (13)$$

Общее число этапов в этой процедуре дается прежней формулой (12).

Определитель-столбец

$$A_n^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{vmatrix}^{(r)} \qquad (14)$$

частный случай общего ЛО $A_q^r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm} \end{vmatrix}^{(r)}$ при $m=1, q=n$.

Поэтому ЛО A_r^n вида (14) можно вычислить с помощью изложенного алгоритма. Именно на первом этапе, сгруппировав элементы в A_r^n по два, получим $\frac{n}{2}$ ЛО-столбцов A_2^k с двумя элементами. Вычислив каждый A_2^s для всех значений ранга s=1,2, получим $\frac{n}{2}$ новых строк длины 2. Составим из них общий ЛО $A_{\frac{n}{2}}^r$ с m=2. На втором этапе, сгруппировав строки в $A_{\frac{n}{2}}^s$ по две, получим $\frac{n}{2^2}$ ЛО A_2^s второго порядка с 2^2 элементами (в каждой строке по два элемента). Вычислив каждый A_2^s для всех значений ранга $s=1,2,\dots,2^2$, получим $\frac{n}{2^2}$ новых строк длины 2^2, из которых составим новый ЛО $A_{\frac{n}{2}}^r$ и т.д. На k-ом этапе вычисляется $\frac{n}{2^k}$ ЛО второго порядка A_2^s с $n(k)$=2 элементами (по 2^{k-1} элементов в каждой строке). Каждый ЛО A_2^s вычисляется: а) на первом, втором,…, $\log_2(n-1)$-м этапе – для всех значений ранга $s=1,2,\dots,\min\left(r,n(k)\right)$; б) на последнем $(\log_2 n)$-м этапе – для единственного ранга s=r.

Покажем преимущества вычисления ЛО путем их блочного разложения.

Пример. Рассмотрим ЛО-столбец $A_4^2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}^{(2)}$. Его раскрытие по традиционной формуле приводит к выражению $A_4^2 = a_1a_2a_3 \vee a_1a_2a_4 \vee a_1a_3a_4 \vee a_2a_3a_4$, сложность которого – 11 элементарных операций БЛ. Раскроем его же по иерархическому правилу разложения $A_4^2 = B_2^1Q_2^2 \vee B_2^2Q_2^1$, где

$$B_2^r = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}^{(r)},\ Q_2^r = \begin{vmatrix} a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}^{(r)}.$$

После раскрытия B_2^r и Q_2^r по традиционной формуле, получим выражение:

$A_4^2 = a_1a_2\left(a_3 \vee a_4\right) \vee a_3a_4\left(a_1 \vee a_2\right)$ со сложностью всего семь элементарных операций БЛ. Как видно, новый способ (блочный) раскрытия ЛО дает значительное преимущество перед традиционным в плане практической реализации, в частности, в виде различных электрических схем.

Список литературы

1. Садовников Н.В., Зубков А.Ф. Экономико-математическое моделирование. Логические методы исследования экономических систем в условиях неопределенности – Пенза: ПГТА, 2003. – 148 с.
2. Москинова Г.И. Дискретная математика. – М.: Логос, 2000. – 240 с.
3. Садовников Н.В. Логико-математические методы в экономике. Монография. Пенза: ПГТА, 2003. – 147 с.

References

1. Sadovnikov N.V., Zubkov A.F. Economic and mathematical modeling. Logical methods for studying economic systems under uncertainty – Penza: PGTA, 2003. – 148 p.
2. Moskinova G.I. Discrete Math – M.: Logos, 2000. – 240 p.
3. Sadovnikov N.V. Logico-mathematical methods in economics. Monograph. Penza: PGTA, 2003. – 147 p.

Садовников Николай Владимирович – доктор педагогических наук, доцент, профессор	**Sadovnikov Nikolay Vladimirovich** – doctor of pedagogical sciences, assistant professor, professor
Будимирова Татьяна Сергеевна – преподаватель	**Budimdrova Tatiana Sergeevna** – senior lecturer
budimiroffa@mail.ru	

Received 12.09.2023